

Devoir Maison n° 6

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 7 octobre 2026

On pose dans cet exercice $f_n(x) = \frac{4e^{nx}}{e^{nx} + 7}$, pour tout entier naturel non nul n .

1. Étude de la fonction f_n .
 - (a) Étudier les variations de f_n .
 - (b) Calculer les limites de f_n en $+\infty$ et en $-\infty$, en déduire son tableau de variations complet.
 - (c) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f_n en son point d'abscisse 0.
 - (d) Tracer dans un même repère une allure des courbes représentatives des fonctions f_1 et f_2 .
2. Montrer que f_n est bijective de $\mathbb{R}$ vers un intervalle à préciser, et donner le tableau de variations de sa réciproque f_n^{-1} . Calculer ensuite explicitement une expression de f_n^{-1} .
3. Montrer que la fonction g_n définie par $g_n(x) = f_n\left(\frac{\ln(7)}{n} - x\right) - 2$ est impaire.
4. Les deux affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses (on justifiera bien sûr les réponses données) :
 - (a) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = 2$.
 - (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x \in \mathbb{R}, f_n(x) = 2$.