

# Devoir Maison n° 4

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 23 septembre 2026

## Applications et relations.

Les différentes questions de ce DM sont une fois de plus complètement indépendantes les unes des autres.

1. Existe-t-il une application  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  pour laquelle tout entier naturel admet exactement 42 antécédents? Existe-t-il une application  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  pour laquelle tout entier naturel admet une infinité d'antécédents? On essaiera bien sûr de justifier les réponses données.
2. On note  $\mathcal{P}$  l'ensemble des entiers naturels qui sont des nombres premiers (on rappelle que 1 n'est **pas** un nombre premier). Sur  $\mathcal{P}$ , on définit la relation  $\mathcal{R}$  de la façon suivante :  $x\mathcal{R}y$  si  $\frac{x+y}{2} \in \mathcal{P}$ . La relation  $\mathcal{R}$  est-elle une relation d'équivalence (réponse à justifier...)?
3. On définit une relation  $\mathcal{R}$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  de la façon suivante  $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, y = x^n$ .
  - (a) Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre. Est-ce un ordre total?
  - (b) Donner un exemple de sous-ensemble de  $\mathbb{R}^{+*}$  contenant quatre éléments et qui admet à la fois un minimum et un maximum pour cette relation. Donner un exemple de sous-ensemble à quatre éléments admettant une borne inférieure et une borne supérieure, mais **pas** de minimum ni de maximum.