

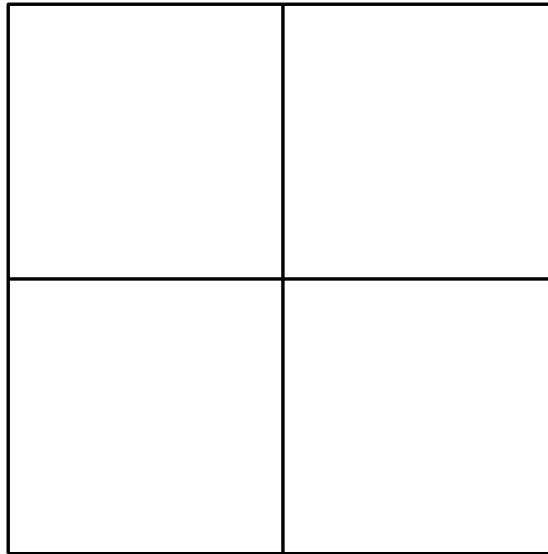
Devoir Maison n° 3 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

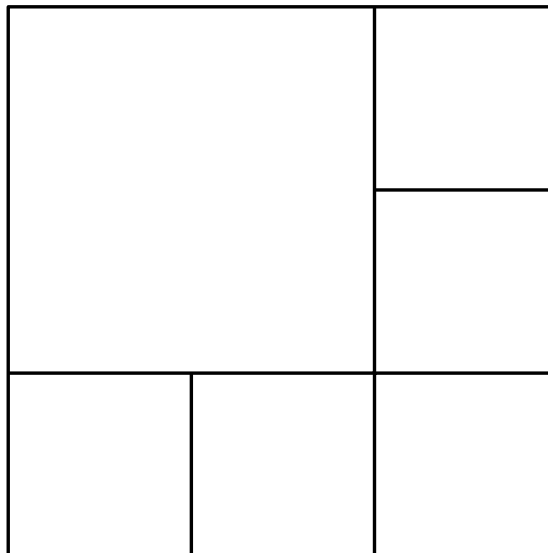
16 septembre 2026

Différents types de raisonnement mathématique.

1. Puisqu'il s'agit de démontrer une équivalence, on va procéder par double inclusion :
 - si $a = b$, alors on a $|a - b| = 0$, et comme tout réel strictement positif est par définition strictement supérieur à 0, on a bien $\forall \varepsilon > 0, |a - b| \leq \varepsilon$.
 - pour l'implication réciproque, il est plus simple de passer par la contraposée : nions donc l'implication de droite en disant qu'il existe un réel strictement positif ε tel que $|a - b| > \varepsilon$. On en déduit que $|a - b| > 0$, et donc que $a \neq b$, ce qui prouve bien l'implication réciproque souhaitée.
2. On va raisonner par analyse et synthèse. Si on suppose que la fonction f vérifie l'égalité proposée, on peut en particulier écrire cette égalité pour $x = 0$, ce qui donne $f(0) = 1$, et pour $x = 1$, ce qui donne $f(1) + f(0) = 2$, donc $f(1) = 2 - f(0) = 1$. Bien, mais deux valeurs ne suffisent pas à déterminer une expression pour une fonction. De façon plus générale, l'égalité devant être vérifiée par tout réel, elle l'est aussi par $1 - x$. Remplaçons donc x par $1 - x$ dans l'égalité : $f(1 - x) + (1 - x)f(1 - (1 - x)) = 1 + 1 - x$, donc $f(1 - x) + (1 - x)f(x) = 2 - x$. En multipliant cette nouvelle équation par x , on a donc $xf(1 - x) = 2x - x^2 - x(1 - x)f(x)$. Reportons cette expression obtenue pour $xf(1 - x)$ dans l'équation initiale : $f(x) + 2x - x^2 - x(1 - x)f(x) = 1 + x$, donc $(x^2 - x + 1)f(x) = x^2 - x + 1$. Voilà qui devient très intéressant. Attention quand même avant de simplifier sans réfléchir, il faut vérifier que $x^2 - x + 1 \neq 0$. Or, ce trinôme ayant un discriminant strictement négatif, il ne s'annule jamais. On peut donc déduire de l'équation précédente que $f(x) = 1$ pour tout réel. La seule fonction solution est donc la fonction constante égale à 1, qui vérifie bien l'équation initiale puisque $1 + x \times 1 = 1 + x$.
3. Intuitivement, il devrait paraître assez clair que, pour obtenir un écart minimal le plus grand possible, il faut répartir les réels de façon régulière dans l'intervalle $[0, 1]$ (tout écart « trop grand » devant être compensé par des écarts plus petits, ce qui fera diminuer la distance minimale). Autrement dit, on aurait tendance à prendre $x_k = \frac{k}{n}$, et donc à avoir un écart constant égal à $\frac{1}{n}$.
Déjà, cet exemple bien choisi prouve que le maximum recherché est au moins égal à $\frac{1}{n}$. Montrons qu'on ne peut pas obtenir mieux en faisant un raisonnement par l'absurde : si on suppose que l'écart minimal entre nos réels est strictement supérieur à $\frac{1}{n}$, alors en particulier on aura $\forall k \in \{1, \dots, n\}, x_k - x_{k-1} > \frac{1}{n}$. Mais dans ce cas, en additionnant toutes ces inégalités, on obtient $(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1}) > \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}$, soit $x_n - x_0 > 1$, ce qui contredit clairement le fait que x_0 et x_n appartiennent tous les deux à l'intervalle $[0, 1]$. La plus grande distance minimale possible est donc bien égale à $\frac{1}{n}$.
4. La question n'a pas de sens pour $n = 0$ et pour $n = 1$. Si $n \geq 2$, il faut au moins quatre carrés pour recouvrir le carré initial (dès qu'on fait une découpe verticale ou horizontale, il faut en créer une dans l'autre sens pour retrouver des carrés, et on en aura donc au moins quatre). Il est facile de créer un découpage du carré initial en 4 carrés de côté $\frac{1}{2}$ (en supposant le carré initial de côté 1) :

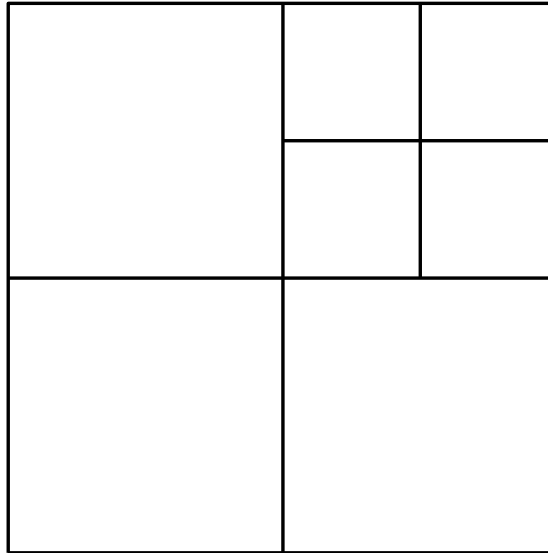


On trouve également une solution simple pour un découpage en 6 carrés, en prenant un « grand » carré de côté $\frac{2}{3}$ et cinq petits carrés de côté $\frac{1}{3}$ pour compléter :



On peut en fait généraliser facilement cette construction pour obtenir une solution pour tous les entiers pairs supérieurs ou égaux à 4. Reste le cas des entiers impairs. On ne peut pas recouvrir un carré avec 5 carrés. En effet, quatre de ces carrés devraient être « dans les coins » du carré initial (aucun carré ne peut contenir deux coins du carré initial sans être égal au carré tout entier), et si on ne fait pas « coller » ces quatre carrés comme dans la solution obtenue pour $n = 4$, la zone non recouverte entre eux ne peut pas être carrée (elle va toucher à la fois un des côtés verticaux du carré initial et un des côtés horizontaux, le seul carré possible pouvant vérifier cela est le carré

initial tout entier). On peut par contre obtenir facilement une solution pour $n = 7$ en repartant de celle trouvée pour $n = 4$ et en découpant l'un des quatre carrés de côté $\frac{1}{2}$ en quatre carrés de côté $\frac{1}{4}$:



En fait, à partir de n'importe quelle solution du problème à n carrés, on peut en obtenir une à $n + 3$ carrés en découpant un des carrés en quatre. Autrement dit, en posant P_n : « il existe une solution à n carrés », alors $P_n \Rightarrow P_{n+3}$. Une récurrence évidente montre alors qu'il existe une solution pour tous les multiples de 3 à partir de $n = 6$, tous les nombres de la forme $n = 3k + 1$ à partir de $k = 1$ (donc $n = 4$) et tous les nombres de la forme $n = 3k + 2$ à partir de $k = 2$ (donc $n = 8$). Les seules valeurs pour lesquelles on n'a pas de solution sont donc 2, 3 et 5.

Si vous avez vraiment énormément plus de temps à perdre, un problème beaucoup plus compliqué : quel est le recouvrement d'un carré par n carrés minimal (le moins de carrés possible) pour lequel les n carrés ont tous des côtés différents et surtout pour lequel on ne peut jamais regrouper deux ou plus de ces n carrés pour former un rectangle ?

Solution avec $n = 21$ carrés (les longueurs des côtés sont indiquées dans chaque carré) :

