

Devoir Maison n° 3

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 16 septembre 2026

Différents types de raisonnement mathématique.

Les différentes questions de ce DM sont complètement indépendantes les unes des autres, et font intervenir certains types de raisonnement évoqués en cours ces derniers jours.

1. Soient a et b deux nombres réels. Montrer rigoureusement que $a = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, |a - b| \leq \varepsilon$.
2. Déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + xf(1 - x) = 1 + x$ (on pourra commencer par déterminer la valeur de $f(0)$ et de $f(1)$).
3. Soient $x_0, x_1, \dots, x_n$ des réels appartenant tous à l'intervalle $[0, 1]$ et classés par ordre croissant : $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1$. Quelle est la valeur maximale que peut prendre la distance minimale entre deux de ces réels (on justifiera évidemment la réponse donnée) ?
4. Question bonus pour les motivés : quelles sont les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquelles on peut découper un carré en n carrés ne se chevauchant pas (sauf au niveau de leurs côtés) ? Les n carrés ne sont pas nécessairement de la même taille.