Devoir Maison n° 12

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 2 décembre 2026

Un exercice de bac.

Non, ce n'est pas une blague, vous avez sous vos yeux, sans la moindre modification, un exercice posé au bac il y a quelques décennies.

Le plan complexe P est rapporté à un repère direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, ayant comme unité graphique 3 cm. Les nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6 que l'on va calculer dans cet exercice seront tous exprimés sous forme algébrique et sous forme exponentielle ($re^{i\theta}$).

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - z\sqrt{3} + 1 = 0$.
   On pose $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ et $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$. Exprimer z_1 et z_2 sous forme exponentielle et placer les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 dans le plan P.
2. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. Calculer l'affixe z_3 du point $M_3 = r(M_2)$. Placer M_3 sur la figure précédente.
3. Soit t la translation dont le vecteur $\vec{w}$ a pour affixe $-\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$. Calculer l'affixe z_4 du point $M_4 = t(M_2)$. Placer M_4 sur la figure.
4. Soient $z_5 = \dfrac{i}{2}(1 + i\sqrt{3})$ et $z_6 = \dfrac{2}{i - \sqrt{3}}$. Exprimer z_5 et z_6 sous forme algébrique et sous forme exponentielle. Placer les points M_5 et M_6 d'affixes respectives z_5 et z_6 sur la figure.
5. (a) Calculer z_k^6 pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
   (b) Écrire $z^6 + 1$ sous forme d'un produit de trois polynômes du second degré à coefficients réels. Justifier cette écriture.