Devoir Maison n° 11

MPSI Lycée Camille Jullian

25 novembre 2026

Un calcul de somme.

1. On constate facilement que $k^3+3k^2+2k = k(k+1)(k+2)$, donc la décomposition sera de la forme $\dfrac{2k-1}{k^3+3k^2+2k} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$. En multipliant par k avant d'évaluer pour $k=0$, on obtient $a = -\dfrac{1}{2}$. De même, on aura $b = \dfrac{-3}{(-1)\times 1} = 3$, et $c = \dfrac{-5}{(-2)\times(-1)} = -\dfrac{5}{2}$, donc $\dfrac{2k-1}{k^3+3k^2+2k} = -\dfrac{1}{2k} + \dfrac{3}{k+1} - \dfrac{5}{2(k+2)}$.

2. On calcule donc à coups de décalage d'indice $S_n = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + 3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} - \frac{5}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + 3\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} - \frac{5}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} - \left(\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) + \dfrac{3}{2} + \left(3\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\right) + \dfrac{3}{n+1} - \left(\dfrac{5}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) - \dfrac{5}{2(n+1)} - \dfrac{5}{2(n+2)} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2(n+1)} - \dfrac{5}{2(n+2)}$.

3. Notons donc P_n la propriété : $S_n = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2(n+1)} - \dfrac{5}{2(n+2)}$. La propriété est vraie pour $n=0$ mais il est plus naturel d'initialiser pour $n=1$: $S_1 = \dfrac{2-1}{1+3+2} = \dfrac{1}{6}$, et $\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{5}{6} = 1 - \dfrac{5}{6} = \dfrac{1}{6}$, donc P_1 est vraie. Supposons ensuite la propriété vraie au rang n, alors $S_{n+1} = S_n + \dfrac{2(n+1)-1}{(n+1)^3+3(n+1)^2+2(n+1)}$. Inutile de faire des calculs pénibles de mise au même dénominateur : la décomposition en éléments simples calculée à la première question est valable pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, donc en particulier pour $k = n+1$, ce qui permet d'écrire que $\dfrac{2(n+1)-1}{(n+1)^3+3(n+1)^2+2(n+1)} = -\dfrac{1}{2(n+1)} + \dfrac{3}{n+2} - \dfrac{5}{2(n+3)}$. On en déduit alors, en exploitant l'hypothèse de récurrence, que $S_{n+1} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2(n+1)} - \dfrac{5}{2(n+2)} - \dfrac{1}{2(n+1)} + \dfrac{3}{n+2} - \dfrac{5}{2(n+3)} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2(n+2)} - \dfrac{5}{2(n+3)}$, soit exactement la formule à obtenir pour démontrer P_{n+1}, ce qui achève la récurrence.