Devoir Maison n° 10 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

18 novembre 2026

Une équation différentielle du second ordre.

1. C'est une équation du second ordre à coefficients constants et avec second m'mbre « sympathique ». L'équation caractéristique associée $r^2-4r+4=0$ a pour racine double évidente $r_0=2$ (on reconnait dans le membre de gauche l'identité remarquable $(r-2)^2$), les solutions de l'équation homogène associée sont donc de la forme $y_h : x \mapsto (Ax+B)e^{2x}$, avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. Mauvaise nouvelle par contre, puisque 2 est racine double de l'équation caractéristique, on va devoir chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x)=P(x)e^{2x}$ avec P un polynôme de degré 4. Histoire de ne pas rendre les calculs horribles, on se contentera de « décaler » les degrés et donc de poser $y_p(x)=(ax^4+bx^3+cx^2)e^{2x}$. On calcule alors $y_p'(x)=(4ax^3+3bx^2+2cx)e^{2x}+2(ax^4+bx^3+cx^2)e^{2x}=(2ax^4+(4a+2b)x^3+(3b+2c)x^2+2cx)e^{2x}$, puis $y_p''(x)=(8ax^3+(12a+6b)x^2+(6b+4c)x+2c)e^{2x}+2(2ax^4+(4a+2b)x^3+(3b+2c)x^2+2cx)e^{2x}=(4ax^4+(16a+4b)x^3+(12a+12b+4c)x^2+(6b+8c)x+2c)e^{2x}$. Quitte à factoriser tout par e^{2x} et à le faire disparaitre de l'équation, notre fonction est donc solution de l'équation (E) si $4ax^4+(16a+4b)x^3+(12a+12b+4c)x^2+(6b+8c)x+2c-8ax^4-(16a+8b)x^3-(12b+8c)x^2-8cx+4ax^4+4bx^3+4cx^2=x^2+1$, soit $12ax^2+6bx+2c=x^2+1$ (les nombreuses simplifications observées sont tout à fait normales, il est en particulier indispensable que les termes de degrés 3 et 4 disparaissent du calcul). Finalement, une identification triviale donne $a=\dfrac{1}{12}$, $b=0$ et $c=\dfrac{1}{2}$, donc $y_p(x)=\left(\dfrac{1}{12}x^4+\dfrac{1}{2}x^2\right)e^{2x}$. Les solutions de l'équation (E) sont donc toutes les fonctions de la forme $y : x \mapsto \left(\dfrac{1}{12}x^4+\dfrac{1}{2}x^2+Ax+B\right)e^{2x}$, avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.
2. Posons donc $y=ze^{2x}$ et dérivons deux fois : $y'=(z'+2z)e^{2x}$, puis $y''=(z''+4z'+4z)e^{2x}$. Si on remplace ces expressions dans le membre de gauche de (E), on obtient donc l'équation équivalente $(z''+4z'+4z)e^{2x}-(4z'+8z)e^{2x}+4ze^{2x}=(x^2+1)e^{2x}$, soit tout bêtement $z''=x^2+1$ en simplifiant les exponentielles. Voila qui est nettement plus simple à résoudre. On primitive deux fois de suite en conservant les constantes pour obtenir **toutes** les solutions de l'équation : $z'(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x+A$, puis $z(x)=\dfrac{1}{12}x^4+\dfrac{1}{2}x^2+Ax+B$, avec A et B deux constantes réelles quelconques. Il ne reste plus qu'à mutliplier cette expression par e^{2x} pour retrouver les solutions de l'équation (E).
3. Si on remplace x par 0 dans l'expression obtenue, on trouve la première condition $B=1$. Dérivons par ailleurs pour obtenir $y'(x)=\left(\dfrac{1}{3}x^3+x+A\right)e^{2x}+2\left(\dfrac{1}{12}x^4+\dfrac{1}{2}x^2+Ax+B\right)e^{2x}$, donc $y'(0)=A+2B$. La deuxième condition donnée impose donc $A=-2B=-2$. L'unique solution au problème de Cauchy est donc la fonction définie par $y(x)=\left(\dfrac{1}{12}x^4+\dfrac{1}{2}x^2-2x+1\right)e^{2x}$.