# Feuille d'exercices n° 25 : Variables aléatoires

MPSI Lycée Camille Jullian

27 mai 2026

## Exercice 1 (*)

On joue au jeu suivant : on parie sur un nombre compris entre 1 et 6, puis on lance trois dés et on gagne 3 euros si le nombre sort 3 fois, 2 euros s'il sort deux fois, 1 euro s'il sort une fois. On perd 1 euro s'il ne sort pas. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable $X$ représentant le gain du joueur.

## Exercice 2 (* à **)

Dans une urne se trouvent six boules. Trois sont numérotées 1, deux sont numérotées 2 et la dernière est numérotée 3. On effectue des tirages successifs sans remise de toutes les boules de l'urne. Pour chacune des variables aléatoires suivantes, déterminer la loi, l'espérance et la variance :

1. $X_1$ est le nombre de boules numérotées 1 présentes dans l'urne à l'issue du troisième tirage.
2. $X_2$ est le nombre de tirages nécessaires avant de ne plus avoir de boules numérotées 1 dans l'urne.
3. $X_3$ est le rang du tirage de la boule numérotée 3.
4. $X_4$ est la somme des numéros tirés lors des trois premiers tirages.
5. $X_5$ est le nombre de tirages nécessaires avant que la somme des numéros obtenus n'atteigne (ou dépasse) 5.

## Exercice 3 (*)

On lance des fusées vers Saturne. À chaque lancer, la probabilité de réussite est de 0.7. On effectue dix lancers successifs, quelle est la probabilité d'obtenir $k$ lancers réussis ? Quel est le nombre moyen de lancers réussis ? Combien faudrait-il de lancers pour avoir 98% de chances qu'au moins un lancer ait réussi ?

## Exercice 4 (*)

Dans une urne se trouvent 10 boules rouges et 5 vertes.

1. On pioche avec remise six boules dans l'urne et on note $R$ le nombre de boules rouges obtenues et $V$ le nombre de vertes. Donner la loi, l'espérance et la variance de $R$ et de $V$ (pas de calcul !).
2. Même question lorsque les tirages sont effectués sans remise (là il va falloir du calcul !).

## Exercice 5 (**)

On lance simultanément quatre dés à 6 faces et on note $X$ le plus grand chiffre obtenu. Déterminer la loi de $X$ (on pourra commencer par calculer les probabilités $\mathbb{P}(X \leqslant k)$, ainsi que son espérance et sa variance.

## Exercice 6 (*)

Est-il possible de truquer deux dés à six faces de la même façon, de façon à ce que, lorsqu'on lance ces deux dés, la variable $X$ représentant la somme des deux chiffres obtenus suive une loi uniforme sur $\{2, 3, \dots, 12\}$ ?

## Exercice 7 (***)

Une urne contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$. On effectue des tirages sans remise dans cette urne jusqu'à ce que le numéro tiré ait un numéro supérieur ou égal au numéro tiré juste avant (ce qui suppose qu'on effectue au moins deux tirages ; par exemple une suite de tirage possible est 7, 4, 2, 5 et on s'arrête après ce quatrième tirage). On note $X$ le nombre de tirages effectués.

1. Quels sont les valeurs prises par la variable $X$ ?
2. Déterminer la loi de $X$ puis son espérance (on pourra commencer par traiter les cas $n = 3$ et $n = 5$).
3. Quelle est la limite de $\mathbb{E}(X)$ quand $n$ tend vers $+\infty$ ?

## Exercice 8 (**)

Un placard contient $n$ paires de chaussures (donc $2n$ chaussures au total), on tire au hasard $2k$ chaussures dans le placard (avec $k \leqslant n$), et on note $X$ le nombre de paires de chaussures complètes qu'on a tirées du placard (ainsi, pour $k = 1$, on aura $X = 1$ si et seulement si les deux chaussures tirées appartiennent à la même paire).

1. En notant $X_i$ la variable indicatrice de l'évènement « On a tiré les deux chaussures de la paire numéro $i$ » (en ayant numéroté au préalable les $n$ paires de chaussures du placard), quelle est la loi de la variable $X_i$ ? Préciser son espérance et sa variance.
2. Exprimer $X$ en fonction des variables $X_i$, en déduire $\mathbb{E}(X)$.

## Exercice 9 (**)

On désire analyser le sang d'une population de $N$ individus pour détecter la présence d'un virus qui affecte les individus de la population avec une probabilité $p$. On a pour cela deux possibilités : soit on analyse le sang de chaque personne, soit on regroupe les personnes en groupes de $n$, dont on analyse le sang en groupe. Si le test du groupe est positif, on analyse individuellement chaque individu du groupe.

1. On note $X$ le nombre de groupes positifs. Donner la loi de $X$.
2. On note $Y$ le nombre total d'analyses effectuées avec la seconde méthode. Calculer en fonction de $N$, $n$ et $p$ l'espérance de $Y$.
3. Comparez les deux méthodes dans le cas où $N = 1000$, $n = 10$ et $p = 0.01$.

## Exercice 10 (**)

Une action est introduite en bourse avec une valeur initiale égale à 1. À partir de cet instant, tous les jours (et indépendamment d'un jour à l'autre), l'action a une probabilité $p$ de voir sa valeur multipliée par un facteur $\alpha > 1$, et une probabilité $1 - p$ de la voir multipliée par un facteur $\beta < 1$ (les facteurs $\alpha$ et $\beta$ sont fixés et identiques d'un jour sur l'autre, tout comme la probabilité $p$). On note $X_n$ la valeur de l'action après $n$ jours.

1. Calculer l'espérance et la variance de la variable $X_n$ (on pourra introduire une variable auxilaire égale au nombre de jours de hausse de la valeur de l'action).
2. On suppose dans cette question que $\beta = \dfrac{1}{\alpha}$. Quele doit être la valeur de $p$ pour avoir $\mathbb{E}(X_n) = 1$ ? Que pourra-t-on dire de la valeur à long terme de l'action si $p$ est strictement inférieure (respectivement strictement supérieure) à la valeur calculée ?
3. On suppose dans cette question que $\alpha = 1 + h$ et $\beta = 1 - h$, où $h$ est un réel strictement positif fixé. Quelle valeur doit-on donner à la probabilité $p$ pour avoir $\mathbb{E}(X_n) = 1$ ? Que vaut alors $\mathbb{V}(X_n)$ ?

## Exercice 11 (***)

Un joueur lance successivement $n$ boules au hasard dans $N$ cases numérotées de 1 à $N$ (avec $N \geqslant 2$), chaque boule ayant probabilité $\dfrac{1}{N}$ de tomber dans chacune des $N$ cases (et les tirages de boules étant indépendants les uns des autres). On cherche à étudier la variable aléatoire $T_n$ égale au nombre de cases **non** vides après $n$ lancers.

1. Déterminer en fonction de $n$ et de $N$ les valeurs prises par $T_n$.

2. Donner les lois de $T_1$ et de $T_2$.
3. Déterminer, lorsque $n \geqslant 2$, les probabilités $\mathbb{P}(T_n = 1)$, $\mathbb{P}(T_n = 2)$ et $\mathbb{P}(T_n = n)$ (en distinguant suivant que $n \leqslant N$ ou $n > N$).
4. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que si $1 \leqslant k \leqslant n$, alors $\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \dfrac{k}{N}\mathbb{P}(T_n = k) + \dfrac{N-k+1}{N}\mathbb{P}(T_n = k-1)$.
5. On considère dans cette question le polynôme $G_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \mathbb{P}(T_n = k)x^k$.
   (a) Quelle est la valeur de $G_n(1)$ ?
   (b) Exprimer $\mathbb{E}(T_n)$ en fonction de $G_n'(1)$.
   (c) En utilisant la relation démontrée à la question 4, montrer que $G_{n+1}(x) = \dfrac{1}{N}(x - x^2)G_n'(x) + xG_n(x)$.
   (d) Dériver l'expression précédente et en déduire que $\mathbb{E}(T_{n+1}) = \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)\mathbb{E}(T_n) + 1$.
   (e) En déduire la valeur de $\mathbb{E}(T_n)$ et déterminer sa limite quand $n$ tend vers $+\infty$.

# Exercice 12 (***)

Une secrétaire effectue $n$ appels pour tenter de joindre $n$ correspondants distincts. Pour chaque appel, elle a une probabilité $p$ d'obtenir son correspondant, et $q = 1 - p$ de ne pas le joindre.

1. On note $X$ le nombre de correspondants obtenus. Quelle est la loi de $X$ ? Donner son espérance et sa variance.
2. La secrétaire tente une deuxième fois de joindre les $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre la première fois. On note $Y$ le nombre de correspondants joints à la deuxième tentative, et $Z = X + Y$. Quelles sont les valeurs que peut prendre $Z$ ?
3. Calculer $\mathbb{P}(Z = 0)$ et $\mathbb{P}(Z = 1)$ (pour cette dernière probabilité, on doit obtenir $npq^{2n-2}(1 + q)$).
4. Démontrer que $\mathbb{P}(Z = l) = \displaystyle\sum_{k=0}^{l} \mathbb{P}((X = k) \cap (Y = l - k))$.
5. Calculer $\mathbb{P}_{X=k}(Y = h)$ pour les valeurs de $k$ et $h$ pour lesquelles cela a un sens, en déduire $\mathbb{P}(Z = l)$.
6. Montrer que $\dbinom{n}{k}\dbinom{n-k}{l-k} = \dbinom{n}{l}\dbinom{l}{k}$. En déduire que $\mathbb{P}(Z = l) = \dbinom{n}{l}p^l(1 + q)^l(q^2)^{n-l}$.
7. En constatant que $p(1 + q) = 1 - q^2$, reconnaitre la loi suivie par $Z$.
8. Retrouver ce résultat en calculant la probabilité qu'un correspondant donné soit joint à l'issue des deux appels.

# Exercice 13 (***)

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. On place dans une urne 2 boules numérotées 0 ainsi que $2^k$ boules numérotées $k$ pour toutes les valeurs de $k$ comprises entre 1 et $n$.

1. (a) Calculer $(1 - q)\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$.
   (b) Montrer que pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 2^k = (n^2 - 2n + 3)2^{n+1} - 6$.
2. On tire une boule au hasard dans l'urne, et on note $X$ le numéro de la boule tirée.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de $X$ (on distinguera $X = 0$ des autres valeurs).
   (b) Calculer l'espérance et la variance de $X$.
3. On définit une seconde variable aléatoire $Y$ de la façon suivante : si $X = 0$ alors $Y = 0$, sinon on enlève de l'urne après le premier tirage toutes les boules dont le numéro est supérieur ou égal à $k$ (où $k$ est la valeur prise par $X$), et on effectue un second tirage, $Y$ étant le numéro obtenu lors de ce second tirage.
   (a) Déterminer pour $k$ et $i$ compris 0 et $n$ la probabilité conditionnelle, $\mathbb{P}_{X=k}(Y = i)$ (on distinguera des cas si nécessaire).

(b) En déduire la loi de probabilité de $Y$.

(c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(Y = i) = 1$.

(d) Calculer l'espérance de $Y$.

# Exercice 14 (***)

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec $c$ boules supplémentaires de la couleur de la boule tirée ($c$ étant évidemment un entier naturel). On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de $n$ tirages ($n > 2$).

## I.Étude du cas $c = 0$.

On note $X$ la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des $n$ tirages et $Y$ la variable aléatoire égale au numéro du premier tirage pour lequel on obtient une boule blanche (si on ne tire que des boules noires, on posera $Y = 0$).

1. Déterminer la loi de $X$. Donner la valeur de $\mathbb{E}(X)$ et de $\mathbb{V}(X)$.
2. Déterminer la loi de $Y$ (on séparera le calcul de $\mathbb{P}(Y = 0)$).
3. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \mathbb{P}(Y = k) = 1$.
4. Montrer que, pour $x \neq 1$ et $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$.
5. En déduire $\mathbb{E}(Y)$.

## II. Étude du cas $c \neq 0$.

On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ indicatrices des événements « On tire une boule blanche au $i$-ème tirage ». On définit ensuite, pour $p$ compris entre 2 et $n$, la variable $Z_p$ par $Z_p = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=p} X_i$.

1. Que représente la variable $Z_p$ ?
2. Donner la loi de $X_1$ et son espérance.
3. Déterminer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{X_1=0}(X_2 = 0)$, $\mathbb{P}_{X_1=0}(X_2 = 1)$, $\mathbb{P}_{X_1=1}(X_2 = 0)$ et $\mathbb{P}_{X_1=1}(X_2 = 1)$. En déduire la loi de $X_2$ ainsi que son espérance.
4. Déterminer la loi de $Z_2$.
5. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable $Z_p$.
6. Soit $p \leqslant n - 1$ :
   (a) Déterminer $\mathbb{P}_{Z_p=k}(X_{p+1} = 1)$.
   (b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $\mathbb{P}(X_{p+1} = 1) = \dfrac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}$.
   (c) En déduire, par un raisonnement par récurrence, que $X_p$ est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

# Exercice 15 (**)

On dispose d'une urne contenant $2n$ jetons numérotés de 1 à $2n$.

1. Un joueur pioche au hasard un jeton dans l'urne. On note $X$ le numéro tiré. Rappeler la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire $X$.
2. Le joueur pioche à présent deux jetons successivement dans l'urne, avec remise du jeton entre les deux tirages. On note $Y$ le plus grand numéro tiré lors de ces deux tirages, $U$ le premier numéro tiré et $D$ le deuxième numéro tiré.

(a) Pour un entier $i \leqslant 2n$, déterminer $\mathbb{P}(U \leqslant i)$ et $\mathbb{P}(D \leqslant i)$, en déduire $\mathbb{P}(Y \leqslant i)$.

(b) Déduire de la question précédente que $\mathbb{P}(Y = i) = \dfrac{2i-1}{4n^2}$.

(c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire $Y$.

3. Le joueur procède maintenant à l'expérience suivante : il tire un premier jeton dans l'urne. Si le numéro obtenu est strictement supérieur à $n$, il conserve ce numéro, mais si ce n'est pas le cas il remet son jeton dans l'urne et effectue un deuxième tirage, et conservera le numéro obtenu à ce deuxième tirage (PAS le plus grand des deux). On note $Z$ le numéro obtenu à l'issue de cette expérience.

(a) Calculer $\mathbb{P}(Z = i)$ dans le cas où $i \leqslant n$.

(b) Calculer $\mathbb{P}(Z = i)$ lorsque $i > n$.

(c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{i=1}^{2n} \mathbb{P}(Z = i) = 1$.

(d) Calculer l'espérance de la variable aléatoire $Z$, et la comparer à celles des variables $X$ et $Y$ calculées plus haut.

# Exercice 16 (***)

Une urne contient $N$ boules : $b$ boules blanches et $N-b$ boules noires (avec $b \geqslant 1$). On tire toutes les boules de cette urne successivement sans remise et on note $X$ le numéro du tirage où on a tiré la dernière boule blanche.

1. Quelle est la loi de $X$ lorsque $b = 1$ ?
2. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de $X$ lorsque $N = 4$ et $b = 2$.
3. On se place maintenant dans le cas général.

(a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire $X$ ?

(b) Déterminer la probabilité qu'on tire $b-1$ boules blanches lors des $k$ premiers tirages, et en déduire que $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\dbinom{k-1}{b-1}}{\dbinom{N}{b}}$.

(c) Calculer, en fonction de $N$ et de $b$, l'espérance de $X$ (on doit pouvoir simplifier le résultat).

# Exercice 17 (***)

On considère une variable $S$ suivant une loi binômiale de paramètre $(n, p)$, et un réel $x > 0$.

1. À l'aide de l'inégalité de Markov, montrer que, si $\lambda > 0$, $\mathbb{P}(S - np \geqslant nx) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(e^{\lambda(S-np)})}{e^{n\lambda x}}$.
2. Calculer $\mathbb{E}(e^{\lambda(S-np)})$.
3. Montrer que, pour tout réel $t$, on a $e^t \leqslant e^{t^2} + t$. En déduire que $\mathbb{P}(S - np \geqslant nx) \leqslant e^{n(\lambda^2 - \lambda x)}$, puis que $\mathbb{P}(S - np \geqslant nx) \leqslant e^{-\frac{nx^2}{4}}$.
4. Expliquer pourquoi on aurait de même $\mathbb{P}(S - np \leqslant -nx) \leqslant e^{-\frac{nx^2}{4}}$.

   En déduire que $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{S}{n} - p\right| \geqslant x\right) \leqslant 2e^{-\frac{nx^2}{4}}$ (inégalité de Bernstein).
5. Comparer cette inégalité avec celle de Bienaymé-Tchebychev pour de grandes valeurs de $n$.

# Exercice 18 (**)

On définit une fonction $f$ sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = -x\ln(x)$, prolongée par continuité en 0 par $f(0) = 0$. Pour une variable aléatoire $X$, on appelle entropie de $X$ le réel $H(X) = \displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} f(\mathbb{P}(X = k))$.

1. Calculer $H(X)$ pour une variable constante.
2. Calculer $H(X)$ pour une variable suivant une loi uniforme.

3. En notant $N = |X(\Omega)|$, montrer que $\displaystyle\sum_{k\in X(\Omega)} f(N\mathbb{P}(X=k)) \leqslant 0$ (on pourra utiliser, après l'avoir démontrée, l'inégalité $f(x) \leqslant 1 - x$).
4. Montrer que $\displaystyle\sum_{k\in X(\Omega)} f(N\mathbb{P}(X=k)) = -N\ln(N) + NH(X)$, en déduire une majoration de $H(X)$.
5. Pour quelles variables aléatoires l'entropie est-elle minimale (on veut une démonstration rigoureuse) ?
6. Pour quelles variables aléatoires l'entropie est-elle maximale (on veut aussi une démonstration rigoureuse) ?

# Exercice 19 (*)

Soient $X$ et $Y$ deux variables indépendantes suivant une loi de Bernoulli de même paramètre $p$. On note $U = X + Y$ et $V = X - Y$. Calculer la loi du couple $(U, V)$. Les deux variables sont-elles indépendantes ? Peut-on avoir $\mathbb{E}(UV) = \mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V)$ ? Calculer également $\mathrm{Cov}(U, V)$.

# Exercice 20 (**)

Une armoire est constituée de trois tiroirs. On y range une chaussette verte, une rouge et une noire. On note $X$ le nombre de chaussettes que contient le premier tiroir et $N$ le nombre de tiroirs vides. Déterminez la loi conjointe puis les lois marginales du couple $(X, N)$. Les deux variables sont-elles indépendantes ?

# Exercice 21 (**)

On dispose de $n$ urnes numérotées de 1 à $n$. L'urne $k$ contient $k$ boules elles-mêmes numérotées de 1 à $k$. On tire une urne au hasard, puis une boule au hasard dans cette urne. On note $X$ le numéro de l'urne et $Y$ le numéro de la boule. Déterminer la loi du couple $(X, Y)$, puis les lois marginales. En déduire l'espérance des variables $X$ et $Y$.

# Exercice 22 (**)

On considère deux variables aléatoires $X$ et $Y$ telle que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{1, 2, \dots, n\}$, et $\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = a \times i \times j$.

1. Déterminer la valeur de la constante $a$.
2. Donner la loi, l'espérance et la variance de $X$.
3. Déterminer la loi de $Y$.
4. Les variables $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?
5. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.
6. On pose $U = \max(X, Y)$. Calculer la loi de $U$.

# Exercice 23 (**)

Soit $n \geqslant 2$, et $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi $\mathcal{U}(\{1, 2, \dots, n\})$.

1. Déterminer la loi de la variable $Z = \max(X, Y)$.
2. Calculer l'espérance de $Z$, en déduire (presque sans calcul) celle de la variable $T = \min(X, Y)$.
3. Calculer la valeur de $\mathbb{E}(ZT)$ (là encore, presque pas de calculs à faire).
4. Les variables $Z$ et $T$ sont-elles indépendantes ?
5. Déterminer la loi du couple $(Z, X)$.
6. Retrouver à l'aide du calcul de la question précédente la loi de la variable $Z$.

## Exercice 24 (*)

À la cantine du lycée, trois plats différents sont proposés à chacun des $n$ élèves qui viennent manger un certain jour. Comme chacun des trois plats est également appétissant, chaque élève choisit aléatoirement (et de manière indépendante des autres) un plat parmi les trois. On note $X_1$, $X_2$ et $X_3$ le nombre d'élèves ayant choisi chacun des trois plats disponibles.

1. Quelles sont les lois des variables $X_i$ ?
2. Donner la variance de $X_1$ de $X_2$ et de $X_1 + X_2$.
3. En déduire la covariance des variables $X_1$ et $X_2$. Sont-elles indépendantes ?

## Exercice 25 (**)

Une urne contient $n+1$ boules numérotées 0 à $n$. On y tire successivement et avec remise un certain nombre de boules. La variable aléatoire $X_k$ est définie de la façon suivante : $X_1 = 1$, et ensuite $X_i = 1$ si le numéro obtenu au tirage $i$ n'avait jamais été tiré avant, $X_i = 0$ sinon.

1. Déterminer la loi de $X_2$.
2. Montrer que $X_i$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{i-1}$.
3. Montrer que, si $i < j$, on a $\mathbb{P}((X_i = 1) \cap (X_j = 1)) = \dfrac{(n-1)^{i-1}n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}$.
4. En déduire la loi du produit $X_iX_j$.
5. Les variables $X_i$ et $X_j$ sont-elles indépendantes ?
6. On note $Z_p$ la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus lors des $p$ premiers tirages. Exprimer $Z_p$ en fonction des variables définies précédemment.
7. En déduire son espérance, et la limite de celle-ci lorsque $p$ tend vers $+\infty$.

## Exercice 26 (***)

Pour une variable aléatoire $X$ à valeurs entières, on définit la fonction génératrice $g_X$ de $X$ de la façon suivante : $\forall t \in \mathbb{R}$, $g_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} t^k \mathbb{P}(X = k)$.

1. Montrer que la connaissance de la fonction $g_X$ permet de déterminer de façon unique la loi de $X$.
2. Calculer $g_X$ lorsque $X$ suit une loi de Bernoulli, puis effectuer le même calcul pour une loi binômiale.
3. Montrer que si $X$ et $Y$ sont deux variables indépendantes à valeurs entières, alors $g_{X+Y} = g_X g_Y$.
4. En déduire que la somme de deux variables suivant des lois binômiales de paramètres respectifs $(n_1, p)$ et $(n_2, p)$ suit une loi binômiale de paramètre $(n_1 + n_2, p)$.

## Exercice 27 (***)

Trois urnes contiennent chacune $n$ boules numérotées de 1 à $n$. On tire une boule dans chaque urne et on note $X_1$, $X_2$ et $X_3$ les trois numéros obtenus. On note $X$ le plus grand des numéros obtenus, $Z$ le plus petit, et $Y$ celui du milieu. Déterminer la loi du triplet $(X, Y, Z)$ (qui est définie, comme vous pourriez vous en douter, comme la donnée des probabilités de toutes les intersections de trois événements possibles). En déduire la loi de $X$, de $Y$ et de $Z$. On pourra commencer pour cet exercice par traiter le cas où $n = 3$.

## Problème (***)

(Note : ce problème n'a absolument rien à faire dans cette feuille d'exercices puisqu'il ne fait pas intervenir la moindre variable aléatoire, mais j'ai bêtement oublié de l'ajouter à la première feuille d'exercices consacrée aux probas).

On décide d'observer l'activité d'un élève de classe préparatoire pendant une longue période, en notant toutes les heures l'activité effectuée par l'élève en question. On observe les faits suivants :

- l'élève partage son temps entre trois activités : manger, dormir, et travailler son cours de physique.

- à l'heure numérotée 0 où on démarre l'expérience, l'élève mange.
- s'il travaille à une certaine heure $n$, il mangera à l'heure suivante avec probabilité $\frac{1}{2}$, et dormira avec probabilité $\frac{1}{2}$ (mais ne travaillera donc jamais, faut pas pousser, pas deux heures de suite sur de la physique quand même).
- s'il mange à l'heure $n$, de même, il se mettra au boulot avec probabilité $\frac{1}{2}$ et dormira avec proba $\frac{1}{2}$ à l'heure $n+1$ (et ne mangera jamais, faut digérer le McDo avant d'aller se chercher un grec).
- s'il dort à l'heure $n$, il se mettra au travail avec probabilité $\frac{1}{4}$, ira prendre un repas avec probabilité $\frac{1}{4}$, et continuera sa sieste avec probabilité $\frac{1}{2}$.

On impose les notations suivantes pour tout l'exercice : on note $A_n$ l'événement « L'élève travaille à l'heure $n$ », $B_n$ l'événement « L'élève mange à l'heure $n$ » et $C_n$ l'événement « L'élève dort à l'heure $n$ ». On notera aussi $a_n$, $b_n$ et $c_n$ les probabilités correspondantes.

1. Calculer les probabilités $a_1$, $b_1$, $c_1$, $a_2$, $b_2$, $c_2$, $a_3$, $b_3$ et $c_3$.
2. Calculer la probabilité conditionnelle $P_{C_3}(A_2)$.
3. À l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer $a_{n+1}$, $b_{n+1}$ et $c_{n+1}$ en fonction de $a_n$, $b_n$ et $c_n$.
4. Première méthode de calcul explicite : avec des suites.
   (a) On pose $u_n = a_n + b_n + c_n$ et $v_n = a_n + b_n - c_n$, montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont très particulières, et déterminer leur valeur.
   (b) En déduire la valeur de $c_n$, puis calculer $a_n$ et $b_n$ (on pourra exploiter des suites arithmético-géométriques).
   (c) Déterminer les limites des trois suites quand $n$ tend vers $+\infty$, et interpréter les résultats obtenus.
5. Deuxième méthode : à l'aide de matrices.
   (a) On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.
   (b) Prouver rigoureusement que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
   (c) Exprimer $A^3$ en fonction de $A$ et de $A^2$. La matrice $A$ est-elle inversible ?
   (d) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que $P$ est inversible et calculer $P^{-1}$.
   (e) Calculer $D = P^{-1}AP$, puis en déduire $A^n$ (il y a un peu de calcul) et retrouver les valeurs de $a_n$, $b_n$ et $c_n$.
6. Troisième méthode : un peu d'applications linéaires.
   (a) On considère l'application $f$ définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = \left(\frac{y}{2} + \frac{z}{4}, \frac{x}{2} + \frac{z}{4}, \frac{x+y+z}{2}\right)$. Montrer que $f$ est une application linéaire, et déterminer son image et son noyau. L'application $f$ est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ ?
   (b) Calculer $F = \ker(f - \mathrm{id})$ et $G = \ker\left(f + \frac{1}{2}\mathrm{id}\right)$.
   (c) Montrer que tout vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ peut se décomposer de manière unique sous la forme $u = u_F + u_G + u_H$, avec $u_F \in F$, $u_G \in G$ et $u_H \in \ker(f)$.
   (d) On note $p$, $q$ et $r$ les trois applications $p : u \mapsto u_F$, $q : u \mapsto u_G$ et $r : u \mapsto u_H$. Montrer qu'il s'agit de trois projecteurs, et déterminer $f \circ p$, $f \circ q$ et $f \circ r$ (on doit pouvoir trouver des expressions faciles sans chercher à faire des calculs explicites).
   (e) En déduire une expression de $f^n$ en fonction de $p$, $q$ et $r$, et donner l'expression explicite de $f^n$.
   (f) Quel est le rapport avec le reste du problème ?