Feuille d'exercices n$^{\circ}$ 6 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

6 novembre 2025

Exercice 1 (***)

1. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $2^n \leqslant n!$. Puisque l'énoncé nous indique que n doit être plus grand que 4, initialisons pour $n = 4$: on a alors $2^4 = 16$ et $4! = 24$, donc l'inégalité est vraie. Supposons désormais P_n vérifiée, c'est-à-dire que $2^n \leqslant n!$. On peut alors en déduire que $2^{n+1} \leqslant 2n! \leqslant (n+1)n! = (n+1)!$ puisque 2 est certainement inférieur à $n+1$ quand n est plus grand que 4. La propriété P_{n+1} est donc vraie, et par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 4.
2. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $\sum\limits_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$. Pour $n = 1$, $\sum\limits_{k=1}^{1} k \times k! = 1 \times 1! = 1$ et $2! - 1 = 2 - 1 = 1$, donc P_1 est vraie. Supposons désormais P_n vraie pour un certain entier n, on a alors $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k \times k! = \sum\limits_{k=1}^{n} k \times k! + (n+1)(n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+1)!(1+n+1) - 1 = (n+2)! - 1$, donc P_{n+1} est vérifiée et par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 1.
3. Prouvons donc par récurrence la propriété P_n : « Un polygone à n côtés a $\dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonales ». Le premier polygone à avoir des diagonales est le carré (ce qui correspond à $n = 4$), qui a deux diagonales. Comme $\dfrac{4 \times 1}{2} = 2$, la propriété P_4 est donc vraie. Supposons maintenant la propriété vraie au rang n, et essayons de la prouver au rang $n+1$. Partons donc d'un polygone à n côtés, et rajoutons un sommet entre deux sommets de ce polygone pour obtenir un polygone à $n+1$ côtés. Ce faisant, on crée $n-1$ nouvelles diagonales : $n-2$ reliant le nouveau sommet à tous les anciens, en excluant les deux sommets qui se trouvent à côté de lui ; et une dernière reliant les deux sommets voisins du nouveau sommet (qui étaient auparavant reliés par un côté du polygone, et le sont désormais par une diagonale). Le nombre de diagonales de notre nouveau polygone vaut donc $n - 1 + \dfrac{n(n-3)}{2}$ (ce deuxième terme issu de l'hypothèse de récurrence) $= \dfrac{2n - 2 + n^2 - 3n}{2} = \dfrac{n^2 - n - 2}{2} = \dfrac{(n+1)(n-2)}{2}$, ce qui prouve la propriété P_{n+1} et permet de conclure la récurrence.
4. Prouvons donc par récurrence la propriété P_n : $f^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n-1)e^{-x}$. Pour $n = 0$, la propriété P_0 stipule que $f^{(0)}(x) = (x-1)e^{-x}$, ce qui est vrai. Supposons donc la propriété P_n vérifiée, alors $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = (-1)^n e^{-x} - (-1)^n(x-n-1)e^{-x} = ((-1)^{n+1}(x - n - 1) + (-1)^n)e^{-x} = (-1)^{n+1}(x-n-1-1)e^{-x} = (-1)^{n+1}(x-(n+1)-1)e^{-x}$, ce qui prouve P_{n+1}. La formule est donc vraie pour tout entier naturel n.
5. Allons-y pour une dernière récurrence. Pour $n = 0$, les deux sommes sont vides et donc égales à 0. Si vraiment on préfère initialiser en faisant un petit calul, pour $n = 1$, la somme de droite comporte un seul terme égal à $\dfrac{1}{2}$, et celle de gauche vaut $1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, ça marche aussi. Supposons l'égalité vérifiée au rang n, alors $\sum\limits_{k=1}^{2(n+1)} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{(-1)^k}{k} + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2}$. En appliquant

l'hypothèse de récurrence, cette somme est égale à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$. Le problème étant qu'on veut désormais avoir des $n+1+k$ au dnominateur de la fraction, on effectue donc un décalage d'indice pour obtenir $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+1+k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+1+k} + \frac{1}{n+1+n} - \frac{1}{2(n+1)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+1+k} + \frac{1}{n+1+n} + \frac{1}{n+1+n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k}$, c'est-à-dire exactement l'expression souhaitée. L'hérédite est donc prouvée, et la formule vérifiée pour tout entier naturel n.

Exercice 2 (**)

On calcule $u_1 = 2$, $u_2 = 8$, $u_3 = 26$, et ça devrait suffire à conjecturer que $u_n = 3^n - 1$. Prouvons donc par récurrence la propriété $P_n : u_n = 3^n - 1$. C'est vrai pour $n = 0$ puisque $3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$, et si on le suppose vérifié au rang n, alors $u_{n+1} = 3u_n + 2 = 3(3^n - 1) + 2 = 3^{n+1} - 3 + 2 = 3^{n+1} - 1$, ce qui prouve P_{n+1}. Par principe de récurrence, on a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 1$.

Exercice 3 (**)

Prouvons donc par récurrence la propriété $P_n : u_n = 2n + \frac{1}{3^n}$. Pour $n = 0$, $2 \times 0 + \frac{1}{3^0} = 1 = u_0$, donc P_0 est vraie. Supposons désormais P_n vérifiée, on a alors $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 4n + 6) = \frac{1}{3}(2n + \frac{1}{3^n} + 4n + 6) = \frac{1}{3^{n+1}} + 2n + 2 = \frac{1}{3^{n+1}} + 2(n+1)$, ce qui prouve P_{n+1}, et par principe de récurrence, P_n est vraie pout tout entier n.

Exercice 4 (***)

On calcule $u_3 = 3 \times 2 - 3 \times 0 + 0 = 6$, $u_4 = 3 \times 6 - 3 \times 2 + 0 = 12$, $u_5 = 3 \times 12 - 3 \times 6 + 2 = 20$, $u_6 = 3 \times 20 - 3 \times 12 + 6 = 30$, et même avec un peu de motivation $u_7 = 3 \times 30 - 3 \times 20 + 12 = 42$. Si on est suffisamment réveillés, on arrive à conjecturer que $u_n = n(n-1)$ (chaque terme est le produit de l'indice par l'entier le précédent). Prouvons donc par récurrence **triple** la propriété P_n : $u_n = n(n-1)$. Il faut initialiser en vérifiant P_0, P_1 et P_2, ce qui ne pose aucun problème puisqu'on a de quoi vérifier jusqu'à P_7 grâce aux calculs précédents. Supposons désormais P_n, P_{n+1} et P_{n+2} vérifiées, on a alors $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n = 3(n+2)(n+1) - 3(n+1)n + (n-1)n = 3(n^2+3n+2) - 3(n^2+n) + n^2 - n = 3n^2 + 9n + 6 - 3n^2 - 3n + n^2 - n = n^2 + 5n + 6 = (n+3)(n+2)$, ce qui prouve P_{n+3}, et par principe de récurrence triple, P_n est vraie pour tout entier n.

Exercice 5 (*)

1. $S_1 = \displaystyle\sum_{i=3}^{12} 2^i$
2. $S_2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{10} \frac{i}{2^i}$
3. $S_3 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{k}$

4. $S_4 = \sum_{i=1}^{25} 2i(-1)^{i+1}$

Exercice 6 (** à ***)

- $\sum_{k=1}^{n}(2k+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{k=n} 1 = n(n+1)+n = n(n+2)$
- $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1} = -\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} = \frac{(-1)^n-1}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n} 3^{2k} = \sum_{k=1}^{n} 9^k = \sum_{k=0}^{n} 9^k - 1 = \frac{1-9^{n+1}}{1-9} - 1 = \frac{9^{n+1}-1}{8} - 1 = \frac{9^{n+1}-9}{8}$
- $\sum_{k=1000}^{2021} 3 = 3 \times 1\ 022 = 3\ 066$
- $\sum_{k=1}^{n} k(2k^2-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n(n+1)-1)}{2}$
  $= \frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n} 2^k + k^2 + 2 = \sum_{k=1}^{n} 2^k + \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} 2 = \sum_{k=0}^{n} 2^k - 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2n$
  $= 2^{n+1} - 2 + 2n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 2(2^n+n-1) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^{n}(6k^2+4k+1) = 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n$
  $= n((n+1)(2n+1) + 2(n+1) + 1) = n(2n^2+5n+4)$
- $\sum_{k=1}^{18} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=1}^{18} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{18} \left(\frac{1}{3}\right)^k - 1 = \frac{1-\frac{1}{3^{19}}}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{19}}\right) - 1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{18}}\right)$
- $\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{9}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{9}\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{9}\frac{1-(\frac{2}{3})^n}{1-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

Exercice 7 (**)

On commence par effectuer une décomposition en éléments simple, qui se mettra sous la forme $\frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1} = \frac{ak(k+1) + b(k-1)(k+1) + ck(k+1)}{(k-1)k(k+1)} = \frac{ak^2 + ak + bk^2 - b + ck^2 + ck}{k(k^2-1)}$. En identifiant, on obtient les conditions $a+b+c=0$, $a+c=1$ et $-b=-5$, soit $b=5$ puis $a=-2$ et $c=-3$ en résolvant le petit système.

On en déduit que $\sum_{k=2}^{n} \frac{k-5}{k(k^2-1)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{-2}{k-1} + \frac{5}{k} + \frac{-3}{k+1} = -2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} + 5\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - 3\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} = -2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + 5\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - 3\sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k} = -2\sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k} - 2 - 1 + 5\sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{5}{2} + \frac{5}{n} - 3\sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{3}{n} - \frac{3}{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{n} - \frac{3}{n+1}$.

Exercice 8 (**)

1. C'est une somme télescopique : $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=2}^{n+1} k^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3 = (n+1)^3 - 1$.

2. Comme $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$.

3. Reprenons le calcul de la question précédente : on a en écrivant les choses légèrement différemment $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$, soit en utilisant le résultat de la première question $\displaystyle 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = (n+1)^3 - 1$, ou encore $\displaystyle 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n = (n+1)^3 - 1 = n^3 + 3n^2 + 3n$. Faisons passer tout ce qu'on peut à droite : $\displaystyle 3\sum_{k=1}^{n} k^2 = n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - n = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{n(2n^2+3n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$. On retrouve donc la formule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 9 (***)

- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} j = \sum_{i=1}^{n} i\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij = \sum_{j=1}^{n} j \sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n} j\frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^3 + j^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{8} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} = \frac{n(n+1)(3n^2+3n+4n+2)}{24} = \frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{24} = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}$.
- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)}{2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{j+1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j+1 = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2} + n\right) = \frac{n(n+3)}{4}$.
- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |i-j| = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{j}(j-i) + \sum_{i=j+1}^{n}(i-j)) = \sum_{j=1}^{n}(j^2 - \frac{j(j+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{j(j+1)}{2} - (n-j)j) = \sum_{j=1}^{n}\left(j^2 - (n+1)j + \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2}$ $\displaystyle = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3} - (n+1) + n\right) = \frac{n(n+1)(2n-2)}{6} = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$
- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i2^j = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} 2^j = \frac{n(n+1)}{2} \times (\sum_{j=0}^{n} 2^j - 1) = \frac{n(n+1)}{2} \times (2^{n+1}-1-1) = n(n+1)(2^n - 1)$

Exercice 10 (**)

- $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} = \frac{\prod_{k=2}^{n} k-1}{\prod_{k=2}^{n} k} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} k}{\prod_{k=2}^{n} k} = \frac{1}{n}$

- $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2}=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}=\frac{\prod_{k=2}^{n}(k-1)\prod_{k=2}^{n}(k+1)}{\left(\prod_{k=2}^{n}k\right)^2}=\frac{\prod_{k=1}^{n-1}k}{\prod_{k=2}^{n}k}\times\frac{\prod_{k=3}^{n+1}k}{\prod_{k=2}^{n}k}=$ $\displaystyle\frac{1}{n}\times\frac{n+1}{2}=\frac{n+1}{2n}$
- $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(6k-3)=\prod_{k=1}^{n}3(2k-1)=3^n\prod_{k=1}^{n}(2k-1)=3^n\frac{\prod_{k=1}^{2n}k}{\prod_{k=1}^{n}2k}=3^n\frac{(2n)!}{2^n\times n!}=\left(\frac{3}{2}\right)^n\frac{(2n)!}{n!}$
- $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\sqrt{k^2+k}=\prod_{k=1}^{n}\sqrt{k}\sqrt{k+1}=\prod_{k=1}^{n}\sqrt{k}\prod_{k=2}^{n+1}\sqrt{k}=1\times\prod_{k=2}^{n}(\sqrt{k})^2\times\sqrt{n+1}=\sqrt{n+1}\times n!$
- $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{4^k}{k^2}=\frac{\prod_{k=1}^n 4^k}{\prod_{k=1}^n k^2}=\frac{4^{\sum_{k=1}^n k}}{(n!)^2}=\frac{4^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(n!)^2}$
- C'est en fait un calcul de somme double et pas de produit (les puissances d'une même variable x vont s'ajouter quand on va effectuer le produit) : $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}x^{i+j}=x^s$, avec $s=\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)=$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)=\sum_{i=1}^{n}ni+\frac{n(n+1)}{2}=2\times\frac{n^2(n+1)}{2}=n^2(n+1)$, donc $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}x^{i+j}=x^{n^2(n+1)}$

Exercice 11 (***)

1. $S_n=1+3+5+\cdots+2n+1$. Cette somme est constituée de $n+1$ termes.
2. $\displaystyle S_n=\sum_{k=0}^{n}8k^3+12k^2+6k+1=8\sum_{k=0}^{n}k^3+12\sum_{k=0}^{n}k^2+6\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=0}^{n}1=2n^2(n+1)^2+2n(n+1)(2n+1)+3n(n+1)+n+1=(n+1)(2n^2(n+1)+2n(2n+1)+3n+1)=(n+1)(2n^3+6n^2+5n+1)$.
3. $\displaystyle U_n=\sum_{k=0}^{2n+1}k^3=\sum_{k\text{ pair}}^{k\leqslant 2n}k^3+\sum_{k\text{ impair}}^{k\leqslant 2n+1}k^3=\sum_{k=0}^{n}(2k)^3+\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^3=T_n+S_n$.
4. On a $\displaystyle U_n=\sum_{k=0}^{n}k^3=\frac{(2n+1)^2(2n+2)^2}{4}=(n+1)^2(2n+1)^2$ en utilisant la formule du cours pour la somme des cubes. De même, $\displaystyle T_n=\sum_{k=0}^{n}(2k)^3=\sum_{k=0}^{n}8k^3=8\times\frac{n^2(n+1)^2}{4}=2n^2(n+1)^2$.
5. Comme $S_n=U_n-T_n$, on a donc $S_n=(n+1)^2(2n+1)^2-2n^2(n+1)^2=(n+1)^2((2n+1)^2-2n^2)=(n+1)^2(2n^2+4n+1)$. Notons que cette formule est bien la même que la précédente puisque $(n+1)(2n^2+4n+1)=2n^3+2n^2+4n^2+4n+n+1=2n^3+6n^2+5n+1$.
6. Prouvons donc par récurrence la propriété P_n : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^3=(n+1)^2(2n^2+4n+1)$. Pour $n=0$, on obtient P_0 : $\displaystyle\sum_{k=0}^{0}(2k+1)^3=1^2\times 1=1$, ce qui est vrai. Supposons désormais P_n vérifiée, on a alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1)^3=\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^3+(2(n+1)+1)^3=(n+1)^2(2n^2+4n+1)+(2n+3)^3=(n^2+2n+1)(2n^2+4n+1)+8n^3+36n^2+54n+27=2n^4+4n^3+n^2+4n^3+8n^2+2n+2n^2+4n+1+8n^3+36n^2+54n+27=2n^4+16n^3+47n^2+60n+28$.

Ne reste plus qu'à vérifier que ça correspond à la formule annoncée : on devrait obtenir $(n+2)^2(2(n+1)^2+4(n+1)+1) = (n^2+4n+4)(2n^2+8n+7) = 2n^4+8n^3+7n^2+8n^3+32n^2+28n+8n^2+32n+28 = 2n^4+16n^3+47n^2+60n+28$. Ca marche, donc P_{n+1} est vérifiée, et par principe de récurrence, toutes les propriétés P_n sont vraies.

Exercice 12 (***)

1. C'est assez immédiat : $\dfrac{k^2}{(k-1)(k+1)} = \dfrac{k^2}{k^2-1} = \dfrac{k^2-1+1}{k^2-1} = 1+\dfrac{1}{k^2-1} \geqslant 1+\dfrac{1}{k^2}$. Bien sûr, l'inégalité ne peut avoir de sens que si $k \geqslant 2$ pour que les deux membres soient définis.

2. Isolons le terme numéro 1 pour lequel l'inégalité précédente n'est pas vérifiée : $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right) \leqslant \prod_{k=2}^{n}\frac{k^2}{(k-1)(k+1)} = \frac{(\prod_{k=2}^{n} k)^2}{(\prod_{k=2}^{n}(k-1)) \times (\prod_{k=2}^{n}(k+1))} = \frac{(n!)^2}{\prod_{k=1}^{n-1} k \times \prod_{k=3}^{n+1} k} = \frac{(n!)^2}{(n-1)! \times \frac{(n+1)!}{2}} = \frac{2n}{n+1} < 2$. Comme le premier terme isolé est lui-même égal à 2, on en déduit directement que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right) \leqslant 2 \times 2 = 4$.

3. Si on note $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$, la suite (u_n) est une suite de réels positifs croissante (on multiplie à chaque fois par un nombre plus grand que 1 pour passer de u_n à u_{n+1}) et majorée par 4 d'après la question précédente. La suite (u_n) est donc convergente, et c'est sa limite qu'on notera sous la forme d'un produit infini. Tout ce qu'on peut dire d'intelligent sur cette limite à partir des questions précédente, c'est que $2 \leqslant \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{k^2}\right) \leqslant 4$. En calculant les valeurs de u_n pour des entiers $n > 1$, on pourrait améliorer la minoration obtenue, mais la majoration par 4 serait nettement plus difficile à modifier. Assez curieusement, le produit infini est calculable, et vaut $\dfrac{\mathrm{sh}(\pi)}{\pi} \simeq 3.67608$.

4. Vous pensez utiliser le même genre de majoration qu'à la question 1 ? C'est une très mauvaise idée, car on n'arrivera pas à créer le même genre de télescopage dans le produit permettant de majorer facilement. Au lieu de ça, puisqu'on nous fournit très gentiment la majoration souhaitée, faisons donc tout simplement une récurrence. Pour $n = 1$, le produit de gauche ne contient qu'un seul terme égal à 2, et le membre de droite est égal à $3-1=2$, donc l'inégalité est vérifiée. Supposons alors la majoration vérifiée pour un certain entier n, alors $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{1}{k^3}\right) = \left(1+\frac{1}{(n+1)^3}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^3}\right) \leqslant \left(3-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^3}\right) = 3+\frac{3}{(n+1)^3}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n(n+1)^3} = 3-\frac{(n+1)^3+1-3n}{n(n+1)^3} = 3-\frac{n^3+3n^2+3n+1+1-3n}{n(n+1)^3} = 3-\frac{n^3+3n^2+2}{n(n+1)^3}$.
   Pour achever de prouver l'hérédité, il faudrait donc réussir à démontrer que $\dfrac{n^3+3n^2+2}{n(n+1)^3} \geqslant \dfrac{1}{n+1}$, pour en déduire que $3-\dfrac{n^3+3n^2+2}{n(n+1)^3} \leqslant 3-\dfrac{1}{n+1}$. Pour cela, calculons leur différence : $\dfrac{n^3+3n^2+2}{n(n+1)^3} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n^3+3n^2+2-n(n+1)^2}{n(n+1)^3} = \dfrac{n^2-n+2}{n(n+1)^3}$. Le numérateur de cette fraction est toujours positif (il a un discriminant négatif), ce qui prouve la positivité du quotient et achève donc la récurrence. Notons qu'on peut donc définir, comme à la question précédente, le produit infini $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{k^3}\right)$, qui sera compris entre 2 et 3. Très curieusement, ce

produit-ci aussi admet une expression presque simple puisque $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{k^3}\right)=\frac{1}{\pi}\operatorname{ch}\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\right)$.

Exercice 13 (*)

Du calcul brutal utilisant bien entendu la formule du binôme de Newton :

- $(x-3)^5 = x^5 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 405x - 243$
- $(2x+3y)^3 = 8x^3 + 36xy^2 + 54xy^2 + 27y^3$
- $(x-1)^7 = x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1$.

Exercice 14 (***)

La première est une application directe de la formule du binôme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = (1-1)^n = 0$.

Pour la deuxième, il est en fait plus facile d'utiliser la formule sans nom vue en cours, sachant qu'on peut oublier $k=0$ dans la somme puisque le terme est nul : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = n\times 2^{n-1}$.

Enfin, pour la dernière, on utilise la même astuce mais en commençant par calculer une autre somme : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n\sum_{k=2}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n-1} k\binom{n-1}{k} = n\sum_{k=1}^{n-1}(n-1)\binom{n-2}{k-1} = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k} = n(n-1)2^{n-2}$. Maintenant, reste à remarquer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}(k(k-1)+k)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$.

Pour les curieux, la méthode faisant intervenir des dérivées : on pose $f(x) = (x+1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$. La fonction f est polynômiale et bien sûr dérivable sur $\mathbb{R}$, mais on peut calculer sa dérivée de deux façons : à partir de la forme factorisée, on obtient $f'(x) = n(x+1)^{n-1}$, mais à partir de la forme développée on aura $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}$. En posant $x=1$, on a donc $f'(1) = n2^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$. De même, le calcul de la dérivée seconde de f donne facilement (toujours pour $x=1$) $n(n-1)2^{n-2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$, et on conclut comme ci-dessus.

Exercice 15 (*)

C'est un calcul ignoble (on multiplie par 2 pour ne pas avoir de fraction) :
$2\left(\binom{n}{2} - \binom{n-p}{2} - \binom{n-q}{2} + \binom{n-p-q}{2}\right) = n(n-1) - (n-p)(n-p-1) - (n-q)(n-q-1) + (n-p-q)(n-p-q-1) = n^2 - n - n^2 + np + n + np - p^2 - p - n^2 + nq + n + nq - q^2 - q + n^2 - np - nq - n - np + p^2 + pq + p - nq + pq + q^2 + q = 2pq$, d'où le résultat.

Exercice 16 (***)

1. Tiens, j'ai comme une envie de faire une récurrence sur n (l'entier p reste donc fixe tout le long du raisonnement). Il faut initialiser la récurrence pour $n = p$ puisque l'égalité n'a pas de sens avant : $\displaystyle\sum_{k=p}^{p} \binom{k}{p} = \binom{p}{p} = 1$, et $\dbinom{p+1}{p+1} = 1$, donc l'égalité est vraie au rang p. Supposons-là vraie pour un certain entier $n \geqslant p$, alors $\displaystyle\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p}$ d'après l'hypothèse de récurrence. Il ne reste plus qu'à appliquer la formule de Pascal pour constater que c'est égal à $\dbinom{n+2}{p+1}$, c'est-à-dire exactement ce qu'il fallait pour prouver l'hérédité. L'égalité est donc vraie pour tout entier $n \geqslant p$.
2. On peut écrire la relation de Pascal sous la forme $\dbinom{k}{p} + \dbinom{k}{p+1} = \dbinom{k+1}{p+1}$, donc $\dbinom{k}{p} = \dbinom{k+1}{p+1} - \dbinom{k}{p+1}$, dont on déduit que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{p}{k} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} = \sum_{k=p+1}^{n+1} \binom{k}{p+1} - \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ (le coefficient binômial « impossible » étant nul).
3. Appliquons la formule pour $p = 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} = \sum_{k=1}^{n} k$ est donc égale à $\dbinom{n+1}{2} = \dfrac{(n+1)n}{2}$, on retrouve bien la formule du cours. Essayons ensuite pour $p = 2$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{2}$ est égal à $\dbinom{n+1}{3} = \dfrac{(n+1)!}{3!(n-2)!} = \dfrac{n(n-1)(n+1)}{6}$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k^2 - k) = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$, puis $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(n-1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n-2+3)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. On retrouve bien sûr également la formule du cours.

Exercice 17 (**)

- $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ -x & - & 3y & + & 5z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & -1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$

  $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & - & y & + & 8z & = & 3 \\ & & y & + & 2z & = & 2 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}$

  $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & - & y & + & 8z & = & 3 \\ & & & & 10z & = & 5 \end{array}\right.$

  Il ne reste plus qu'à remonter le système triangulaire obtenu : $z = \dfrac{1}{2}$, puis $y = 8z - 3 = 1$ et enfin $x = 1 - 2y - 3z = -\dfrac{5}{2}$, soit $\mathcal{S} = \left\{\left(-\dfrac{5}{2}, 1, \dfrac{1}{2}\right)\right\}$.

- $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ \\ \end{array}$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ 2x & & & + & z & = & 6 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right. \quad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ 2x & & & + & z & = & 0 \\ & & & & z & = & -3 \end{array}\right.$$

On remonte très rapidement le système : $z = 0$, puis $x = 3$ et $y = 2$, donc $\mathcal{S} = \{(3, 2, 0)\}$.

- $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 2 \\ x & - & 2y & + & 4z & = & 1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & -3 \\ & & 3y & - & 5z & = & -1 \end{array}\right. \quad L_3 \leftarrow 3L_2 - L_3$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & -3 \\ & & & & 8z & = & -8 \end{array}\right.$$

On remonte : $z = -1$ puis $y = -3 - z = -2$ et enfin $x = \dfrac{1 + y - 3z}{2} = 1$, donc $\mathcal{S}\{(1, -2, -1)\}$

- $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & z & = & -1 \\ x & - & 3y & + & 2z & = & -1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ & & 3y & + & z & = & 5 \\ & & 5y & - & z & = & 3 \end{array}\right. \quad L_3 \leftarrow 5L_2 - 3L_3$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ & & 3y & + & z & = & 5 \\ & & & & 8z & = & 16 \end{array}\right.$$

On remonte : $z = 2$ puis $y = \dfrac{5 - 2}{3} = 1$ et $x = 2 - 2y - z = -2$, soit $\mathcal{S} = \{(-2, 1, 2)\}$.

- Le paramètre étant simplement dans le membre de droite du système, pas de raison de ne pas utiliser la méthode habituelle :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 3x & + & 4y & + & 5z & = & a \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & & y & + & z & = & -1 \\ & & y & - & z & = & a - 15 \end{array}\right. \quad L_3 \leftarrow L_2 + L_3$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & & y & + & z & = & -1 \\ & & & & 2y & = & a - 16 \end{array}\right.$$

On remonte tranquillement le système qui a toujours une solution unique : $y = \dfrac{a}{2} - 8$, puis $z = -\dfrac{a}{2} + 7$ et $x = \dfrac{a}{2} - 1$, soit $\mathcal{S} = \left\{\left(\dfrac{a}{2} - 1, \dfrac{a}{2} - 8, -\dfrac{a}{2} + 7\right)\right\}$.

- Il vaut mieux ici commencer par permuter les lignes pour ne pas avoir de pivot dépendant de m (ce qui empêche de faire des opérations sur les lignes en les multipliant par des coefficients susceptibles d'être nuls).

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & mz & = & m^2 \\ mx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & my & + & z & = & m \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow mL_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & mz & = & m^2 \\ & & (m-1)y & + & (m^2-1)z & = & m^3-1 \\ & & (1-m)y & + & (m-1)z & = & m^2-m \end{array}\right. \quad L_3 \leftarrow L_2 + L_3$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & mz & = & m^2 \\ & & (m-1)y & + & (m^2-1)z & = & m^3-1 \\ & & & & (m^2+m-2)z & = & m^3+m^2-m-1 \end{array}\right.$$

Le système est de Cramer si $m \neq 1$ (à cause du coefficient devant y), et si $m^2+m-2 \neq 0$. Comme $m^2+m-2 = (m-1)(m+2)$ (il y a une racine évidente), les seules valeurs problématiques sont 1 et -2. Si $m \notin \{-2, 1\}$, on remonte le système pour trouver $z = \dfrac{m^3+m^2-m-1}{m^2+m-2} = \dfrac{(m+1)(m^2-1)}{(m-1)(m+2)} = \dfrac{(m+1)^2}{m+2}$, puis $y = \dfrac{m^3-1-(m^2-1)z}{m-1} = m^2 + m+1-(m+1)z = m^2+m+1-\dfrac{(m+1)^3}{m+2}$, et enfin $x = m^2 - mz - y = -m-1-\dfrac{m(m+1)^3}{m+2}$ (valeurs sans aucun intérêt, d'ailleurs).

Regardons plutôt ce qui se passe dans les cas particuliers. D'abord si $m = 1$, le système triangulaire se réduit à l'unique équation $x+y+z = 1$ (effectivement, dans le système initial, les trois équations sont alors identiques), donc $\mathcal{S} = \{(x, y, 1-x-y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Dans le cas où $m = -2$, la dernière équation devient $0 = -3$, le système n'a alors pas de solution.

- Là encore, on va se débrouiller pour utiliser des pivots constants :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - aL_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} & & b(1-a)y & + & (1-a^2)z & = & 1-a \\ & & b(a-1)y & + & (1-a)z & = & b-1 \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}\right. \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} & & & & (2-a-a^2)z & = & b-a \\ & & b(a-1)y & + & (1-a)z & = & b-1 \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}\right.$$

On va avoir un système qui n'est pas un système de Cramer si $b = 0$, $a = 1$ ou $a = -2$ (cf le système précédent pour ces valeurs, le coefficient devant z est le même). Dans tous les autres cas, on a une solution unique dont l'expression ne présente aucun intérêt : $z = \dfrac{b-a}{2-a-a^2}$, $y = \dfrac{b-1}{b(a-1)} + \dfrac{b-a}{b(2-a-a^2)}$, et $x = 1 - \dfrac{b-1}{a-1} + \dfrac{b-a}{2+a}$.

Regardons les cas particuliers : si $b = 0$, l'inconnue y disparait tout simplement du système, et la deuxième équation donne $x+z = 0$. Or, en additionnant les deux équation extrêmes, on trouve $(a+1)(x+z) = 2$, ce qui est impossible si $x+z = 0$. Il n'y a donc pas de solution.

Si $a = 1$, les membres de gauche des trois équations sont identiques égaux à $x+by+z$, mais celui de droite vaut b dans la deuxième équation et 1 dans les deux autres. Si $b \neq 1$, il n'y a donc pas de solution, et si $b = 1$, les solutions sont de la forme $(x, y, 1-x-y)$.

Si $a = -2$, la somme des trois équations donne $0 = b+2$, il faut donc avoir $b = -2$ également. On doit alors résoudre le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} -2x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ x & + & 4y & + & z & = & -2 \\ x & - & 2y & - & 2z & = & 1 \end{array}\right.$.

La différence des deux premières équations donne alors $-3x-6y = 3$, soit $x = -1-2y$, la différence des deux dernières donne $-6y-3z = 3$, soit $z = x = -1-2y$. On ne peut pas faire mieux, donc $\mathcal{S} = \{(-1-2y, y, -1-2y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 18 (**)

Puisqu'on va devoir exprimer la réciproque, autant essayer de le faire immédiatement, cela prouvera que l'application est bijective. Il s'agit en fait de résoudre le système $f(x,y,z) = (a,b,c)$ pour tout triplet de réels (a,b,c), autrement dit d'exprimer les solutions en fonction de a, b et c, ce qui donnera immédiatement l'expression de la réciproque.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & & & = & a \\ x & + & 3y & + & 2z & = & b \\ -3x & + & 2y & + & 3z & = & c \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_3$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & & & = & a \\ 9x & + & 5y & & & = & 3b-2c \\ -3x & + & 2y & + & 3z & = & c \end{array}\right. \qquad L_1 \leftarrow 5L_1 - L_2$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & & & = & 5a-3b+2c \\ 9x & + & 5y & & & = & 3b-2c \\ -3x & + & 2y & + & 3z & = & c \end{array}\right.$$

On remonte comme d'habitude le système : $x = 5a - 3b + 2c$, puis $y = -9a + 6b - 4c$, et enfin $z = 11a - 7b + 5c$. La solution étant toujours unique, tout triplet de $\mathbb{R}^3$ admet un unique antécédent, et f est bijective, de réciproque $f^{-1} : (a,b,c) \mapsto (5a - 3b + 2c, -9a + 6b - 4c, 11a - 7b + 5c)$.

Même méthode pour l'application g :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & z & = & a \\ -x & + & 2y & + & 3z & = & b \\ x & + & 2y & & & = & c \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 3L_1 + L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x & + & 7y & & & = & 3a-b \\ -x & + & 2y & + & 3z & = & b \\ x & + & 2y & & & = & c \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow 4L_3 - L_1$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x & + & 7y & & & = & 3a-b \\ -x & + & 2y & + & 3z & = & b \\ & & y & & & = & 4c-3a+b \end{array}\right.$$

On remonte une dernière fois : $y = -3a + b + 4c$, puis $x = 6a - 2b - 7c$, et $z = 4a - b - 5c$, donc g est bijective et $g^{-1}(a,b,c) = (6a - 2b - 7c, -3a + b + 4c, 4a - b - 5c)$.

Exercice 19 (***)

1. Posons donc $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ et calculons $P(x+1) - P(x) = a(x+1)^4 + b(x+1)^3 + c(x+1)^2 + d(x+1) + e - ax^4 - bx^3 - cx^2 - dx - e$. En développant tout brutalement à coups de binôme de Newton et en simplifiant, il reste $P(x+1) - P(x) = a(4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) + b(3x^2 + 3x + 1) + c(2x + 1) + d = x^3$. On procède alors à une identification des coefificients : $4a = 1$, donc $a = \frac{1}{4}$, puis $6a + 3b = 0$ donc $b = -2a = -\frac{1}{2}$, et $4a + 3b + 2c = 0$, donc $2c = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{4}$. Enfin, le coefficient constant $a + b + c + d = 0$ impose simplement $d = 0$. Le coefficient e peut être choisi librement puisqu'il n'intervient pas dans les conditions obtenues, on posera simplement $e = 0$. Autrement dit, $P(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2$.

2. C'est une somme télescopique : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(k+1) - P(k) = \sum_{k=1}^{n+1} P(k) - \sum_{k=0}^{n} P(k) = P(n+1) - P(0)$. Ici, comme $P(0) = 0$, on garde simplement le terme $P(n+1)$.

3. On sait que $P(k+1)-P(k)=k^3$, donc $\sum_{k=0}^{n} P(k+1)-P(k) = \sum_{k=0}^{n} k^3 = P(n+1)$. Il ne reste donc plus qu'à calculer $P(n+1) = \frac{1}{4}(n+1)^4 - \frac{1}{2}(n+1)^3 + \frac{1}{4}(n+1)^2 = \frac{(n+1)^2((n+1)^2-2(n+1)+1}{4} = \frac{(n+1)^2n^2}{4}$, soit exactement la formule connue.
4. Pour que ça fonctionne, il va falloir cette fois-ci partir d'un polynôme de degré 5. Posons donc $Q(x) = ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex$ (pas besoin de coefficient constant, il disparaitra à nouveau des calculs), et calculons $Q(x+1)-Q(x) = a(5x^4+10x^3+10x^2+5x+1)+b(4x^3+6x^2+4x+1)+c(3x^2+3x+1)+d(2x+1)+e$. On souhaite que cette expression s'identifie à x^4, ce qui donne les conditions $5a=1$, donc $a=\frac{1}{5}$, $10a+4b=0$, donc $b=-\frac{5}{2}a=-\frac{1}{2}$, $10a+6b+3c=0$, donc $c=\frac{1}{3}$, $5a+4b+3c+2d=0$ donc $d=0$ et $a+b+c+d+e=0$ donc $e=-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{30}$. Bon, au moins on sait pourquoi on a un dénominateur 30 dans la formule donnée par l'énoncé. On a donc obtenu $Q(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x$. Le même télescopage qu'à la question 2 va bien sûr prouver que $\sum_{k=0}^{n} k^4 = Q(n+1)$, il ne reste plus qu'à factoriser cette dernière valeur : $Q(n+1) = \frac{1}{5}(n+1)^5 - \frac{1}{2}(n+1)^4 + \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{30}(n+1) = \frac{n+1}{30}(6(n+1)^4 - 15(n+1)^3 + 10(n+1)^2 - 1)$. Développons entièrement cette dernière parenthèse, qui est égale à $6n^4+24n^3+36n^2+24n+6-15n^3-45n^2-45n-15+10n^2+20n+10-1 = 6n^4+9n^3+n^2-n = n(6n^3+9n^2+n-1)$. Il ne reste plus qu'à vérifier que le dernier facteur est correct : $(2n+1)(3n^2+3n-1) = 6n^3+6n^2-2n+3n^2+3n-1 = 6n^3+9n^2-n-1$. C'est bon, on a bien prouvé que $\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.
5. Il faut juste être un peu courageux. Déjà, vérifions la formule pour $n=1$ (ça marche évidemment pour $n=0$ mais c'est trop facile) : $\frac{1\times2\times3\times5}{30}=1$, c'est bon. Supposons désormais la formule vraie au rang n, alors $\sum_{k=0}^{n+1} k^4 = \sum_{k=0}^{n} k^4 + (n+1)^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} + (n+1)^4 = \frac{n+1}{30}\times[6n^4+9n^3+n^2-n+30(n^3+3n^2+3n+1)] = \frac{(n+1)^4}{30}\times(6n^4+39n^3+91n^2+89n+30)$. Pour que la récurrence fonctionne, ce dernier facteur devrait être égal (en décalant la formule et en enlevant le $n+1$ déjà mis en facteur) à $(n+2)(2n+3)(3(n+1)^2+3(n+1)-1) = (2n^2+7n+6)(3n^2+9n+5) = 6n^4+18n^3+10n^2+21n^3+63n^2+35n+18n^2+54n+30 = 6n^4+39n^3+91n^2+89n+30$. Incroyable, ça marche ! Je suis sûr que vous êtes déçus de vous arrêter là et que vous auriez adoré chercher une formule similaire pour $\sum_{k=0}^{n} k^5$.

Exercice 20 (**)

Puisqu'on ne nous a donné aucun indice, essayons déjà de voir ce que vaut cette drôle de somme pour de petites valeurs de n. Pour $n=0$, la somme S_0 ne contient qu'un seul terme, qui vaut $\frac{1}{2^0}\binom{0}{0} = 1$. Bon, essayons avec $n=1$, la somme a cette fois deux termes : $S_1 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{2^k}\binom{k}{1} = \frac{1}{2}\times1+\frac{1}{4}\times2 = 1$. Encore ? Vérifions pour $n=2$, trois termes à calculer : $S_2 = \sum_{k=2}^{4} \frac{1}{2^k}\binom{k}{2} = \frac{1}{4}\times1+\frac{1}{8}\times3+\frac{1}{16}\times6 = 1$. Là, on commence à se douter de quelque chose. Allez, une dernière pour la route, on ne sait jamais, testons $n=3$: $S_3=\sum_{k=3}^{6}\frac{1}{2^k}\binom{k}{3}=\frac{1}{8}\times 1+\frac{1}{16}\times 4+\frac{1}{32}\times 10+\frac{1}{64}\times 20=1$ (je vous épargne le détail du calcul des coefficients binômiaux utilisés, refaites un petit triangle de Pascal si besoin). On conjecture brillamment que, $\forall n\geqslant 0$, $S_n=1$. Il ne reste plus qu'à le prouver.

On va effectuer une sorte de démonstration par récurrence. L'initialisation a largement été faite ci-dessus, mais avant de commencer l'hérédité, écrivons S_n un peu différemment : $S_n=\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{2^k}\binom{k}{n}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{n+k}}\binom{n+k}{n}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{n+k}}\binom{k+n}{k}$ en appliquant successivement un changement d'indice (décalage de n unités de l'indice) puis la symétrie des coefficients binômiaux qui assure que $\binom{n+k}{n}=\binom{n+k}{(n+k)-n}=\binom{n+k}{k}$. En partant de cette nouvelle formule, esssayons de calculer $S_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{2^{n+1+k}}\binom{n+1+k}{k}$. On va commencer par appliquer la relation de Pascal pour écrire $\binom{n+1+k}{k}=\binom{n+k}{k}+\binom{n+k}{k-1}$, donc $S_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{2^{n+1+k}}\binom{n+k}{k}+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2^{n+1+k}}\binom{n+k}{k-1}$ (on a fait partir la deuxième somme de $k=1$ puisque le terme numéro 0 y est nul). La première somme n'est autre que S_n, à un facteur $\frac{1}{2}$ près et à un terme numéro $n+1$ près également. Plus précisément, elle vaut donc $\frac{1}{2}S_n+\frac{1}{2^{2n+2}\binom{2n+1}{n+1}}$. Pour la deuxième somme, décalons les indices pour la transformer en $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{n+2+k}}\binom{n+k+1}{k}$. Cette fois-ci, est S_{n+1} qu'on reconnait, à un facteur $\frac{1}{2}$ et à un terme manquant près. La deuxième somme est égale à $\frac{1}{2}S_{n+1}-\frac{1}{2^{2n+3}}\binom{2n+2}{n+1}$. Or, on peut remarquer, en utilisant à nouveau la relation de Pascal, que $\binom{2n+2}{n+1}=\binom{n+1}{2n+1}+\binom{2n+1}{n}=2\times\binom{2n+1}{n+1}$ (la symétrie des coefficients binômiaux fait que les deux termes additionnés sont égaux). Cela revient exactement à dire que le terme ajouté à la somme de gauche est égal à celui retranché dans la somme de droite, et donc que $S_{n+1}=\frac{1}{2}S_n+\frac{1}{2}S_{n+1}$. Autrement dit, $S_{n+1}=S_n$, la suite (S_n) est donc constante, égale à 1 au vu des premières valeurs calculées plus haut.

Problème : autour d'inégalités célèbres (***)

1. (a) Il suffit de développer pour constater qu'on a un polynôme de degré 2, à condition toutefois que le coefficient devant x^2 ne puisse pas être nul. Comme il est égal à $\sum_{k=1}^{n}a_k^2$ qui est manifestement strictement positif, aucun risque, on a bien du « vrai » degré 2.

   (b) Avec les notations habituelles pour les coefficients d'un trinôme, on a ici $a=\sum_{k=1}^{n}a_k^2$, $b=2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$ et $c=\sum_{k=1}^{n}b_k^2$, donc $\Delta=4(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k)^2-4\sum_{k=1}^{n}a_k^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2$. Comme $f(x)$ est toujours positif (c'est une somme de carrés !), il ne peut pas y avoir deux racines distinctes pour f, donc $\Delta\leqslant 0$.

   (c) Quitte à simplifier par 4, $\Delta\leqslant 0$ signifie que $(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2$. Tout est positif partout avec les hypothèses faites sur les réels a_k et b_k, on peut donc tout passer à la racine carrée pour obtenir exactement l'inégalité souhaitée.

(d) L'égalité est évidente si $a_k = b_k$ puisque la somme de droite est alors égale à $\sum_{k=1}^{n} a_k^2$, exactement la même chose que ce qui se trouve sous chacune des racines carrées du membre de droite. Mais si cette condition est suffisante pour assurer l'égalité, elle n'est en fait pas nécessaire. On a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwartz si le discriminant Δ calculé plus haut est nul, ce qui sera le cas si f s'annule exactement une fois. Notons x la valeur d'annulation correspondante, on doit alors avoir $x = -\frac{b_k}{a_k}$ pour tout entier k compris entre 1 et n pour que la somme de termes positifs constituant $f(x)$ puisse être égale à 0 (chaque carré doit être nul). Ceci n'est évidemment possible que si toutes les valeurs $\frac{b_k}{a_k}$ sont identiques, condition nécessaire et suffisante pour avoir notre égalité (on verra plus tard dans l'année que l'inégalité de Cauchy-Schwartz a une inetrprétation géométrique dans ce qu'on appelle les espaces vectoriels euclidiens ; la condition d'égalité signifie alors simplement que les vecteurs $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ sont des vecteurs colinéaires de $\mathbb{R}^n$).

2. (a) On va en fait montrer que, pour tout indice k, l'inégalité $a_k^2 + mMb_k^2 \leqslant (m+M)a_kb_k$, il suffira ensuite d'additionner toutes ces inégalités pour obtenir celle demandée par l'énoncé. Factorisons notre inégalité par a_kb_k (toujours supposé strictement positif) pour obtenir $\frac{a_k}{b_k} + mM\frac{b_k}{a_k} \leqslant m + M$. Posons alors $x = \frac{a_k}{b_k}$. Par définition des réels m et M, on a nécessairement $m \leqslant x \leqslant M$, et on cherche donc à prouver que $x + \frac{mM}{x} \leqslant m + M$. Posons donc $f(x) = x + \frac{mM}{x}$, la fonction f est certainement définie et dérivable sur l'intervalle $[m, M]$, de dérivée $f'(x) = 1 - \frac{mM}{x^2} = \frac{x^2 - mM}{x^2}$. Cette dérivée s'annule (sur $]0, +\infty[$) en $x = \sqrt{mM}$, qui appartient bien à l'intervalle $[m, M]$ (il suffit de comparer les carrés), la fonction f est donc décroissante sur $[m, \sqrt{mM}]$ puis croissante sur $[\sqrt{mM}, M]$. Or, $f(m) = f(M) = m + M$, ce qui suffit donc à prouver que $\forall x \in [m, M]$, $f(x) \leqslant m + M$. Ça tombe bien, c'est exactement ce qu'on souhait démontrer.

(b) Une question beaucoup plus rapide à traiter : $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{x - 2\sqrt{xy} + y}{2} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{2} \geqslant 0$.

(c) Posons donc brutalement $x = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$ et $y = mM\sum_{k=1}^{n} b_k^2$, alors d'après la question précédente $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$, soit $\sqrt{mM}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + mM\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$. On divise tout par $\sqrt{mM}$ et on enchaîne avec l'inégalité de la question a et on a exactement $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \leqslant \frac{m+M}{2\sqrt{mM}}\sum_{k=1}^{n} a_kb_k$.

3. (a) On va appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwartz en posant $a_i = \sqrt{c_i}$ (les réels c_i étant supposés strictement positifs, on peut le faire et on obtiendra des a_i eux-même strictement positifs) et $b_i = \frac{i}{\sqrt{c_i}}$ (tous ces nombres seront également strictement positifs). En élevant l'inégalité de Cauchy-Schwartz au carré, son membre de droite est alors égal à $\sum_{i=1}^{k} a_i^2 \sum_{i=1}^{k} b_i^2 = \sum_{i=1}^{k} c_i \sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{c_i}$, et le membre de gauche de cette même inégalité (toujours

élevée au carré) vaut $(\sum_{i=1^n} a_ib_i)^2 = (\sum_{i=1}^{n} i)^2 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$ en appliquant la formule du cours pour la somme des entiers inférieurs ou égaux à k.

(b) On vient de prouver que $\forall k \leqslant n$, $\sum_{i=1}^{k} c_i \geqslant \frac{k^2(k+1)^2}{4\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{c_i}}$. Tout cela étant strictement positif, on peut le passer à l'inverse : $\frac{1}{c_1+c_2+\cdots+c_k} \leqslant \frac{4\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{c_i}}{k^2(k+1)^2}$, donc $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{c_1+c_2+\cdots+c_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{4\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{c_i}}{k(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{4i^2}{k(k+1)^2c_i}$. Il suffit en fait d'inverser les deux sommes dans la somme double obtenue à droite pour trouver exactement le membre de droite demandé dans l'énoncé : on a $1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$, donc en écrivant la somme double dans l'autre sens, i variera bien entre 1 et n, et k entre i et n. On peut bien sûr sortir les termes $\frac{i}{c_i}$ de la somme intérieure indicée par k, et la constante 4 des deux sommes.

(c) Calculons simplement la différence $\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{2}{k(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2-k^2-2k}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2(k+1)^2}$, qui est manifestement un nombre positif.

(d) On majore terme par terme : $\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{k(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{i^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right) \leqslant \frac{1}{2i^2}$ (on a simplement fait apparaitre une somme télescopique très classique).

(e) On majore simplement le membre de droite de l'inégalité de la question b en exploitant la question précédente par $4\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{c_i}\times\frac{1}{2i^2} = 2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{c_i}$. Le nom de la variable muette indiçant la somme n'ayant aucune importance, on obtient bien le résultat souhaité.

(f) Supposons donc que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = c$ avec $c \in \mathbb{R}$, on trouve alors $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{kc} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{c}$, soit $\frac{n}{c} \leqslant \frac{2n}{c}$, une inégalité qui est certes vraie mais pas franchement extraordinaire.

(g) Faisons donc ce qu'on nous demande et posons $c_k = k$, alors le membre de gauche de l'inégalité de Hardy est égal à $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{1+2+\cdots+k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{k(k+1)} = 2\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}$. Le membre de droite, lui, est simplement égal à $2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Notons donc $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, notre membre de droite est donc égal à $2u_n$ et celui de gauche à $2u_n + \frac{2}{n+1} - 2$. Le quotient des deux est donc égal à $1 + \frac{1}{(n+1)u_n} - \frac{1}{u_n}$ qui tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$ en exploitant la limite donnée par l'énoncé. On ne peut donc pas obtenir une constante plus petite que 2 dans le membre de droite de l'inégalité de Hardy (sinon le quotient finirait par devenir supérieur à 1 et l'inégalité serait donc fausse !).