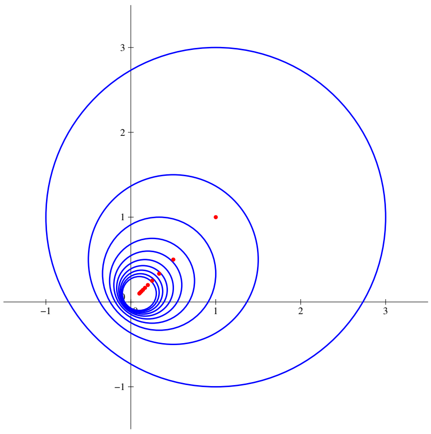
Feuille d'exercices n° 27 : corrigé.

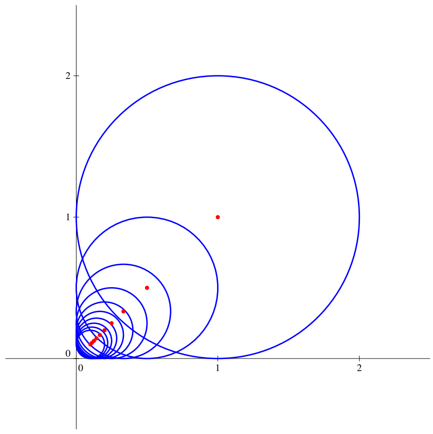
MPSI Lycée Camille Jullian

11 juin 2026

Exercice 1 (*)

1. À quelle condition une boule est-elle incluse dans une autre ? Si $OO' + r' \leqslant r$, en notant O et O' les centres des deux boules, et r et r' leurs rayons (avec r le plus grand des deux rayons). Ici, cela se traduit donc par $O_nO_{n+1} + \dfrac{r}{n+1} \leqslant \dfrac{r}{n}$, ou encore $\sqrt{2\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)^2} \leqslant \dfrac{r}{n} - \dfrac{r}{n+1}$, donc $\sqrt{2} \leqslant r$. Un dessin des boules B_n ci-dessous dans le cas où $r = 2$ (donc $r > \sqrt{2}$) puis $r = 1$ (donc $r < \sqrt{2}$). À chaque fois, les cercles sont en bleu et les centres en rouge :





2. Si $r \geqslant \sqrt{2}$, la question précédente prouve que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} \subset B_n$, donc B_n est toujours incluse dans B_1 et $B = B_1$ est évidemment fermé. Si $r < \sqrt{2}$, on constate que la distance entre $(0,0)$ et O_n est égale à $\sqrt{\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{n} > \dfrac{r}{n}$, donc l'origine $(0,0)$ n'appartient à aucune des boules B_n, et donc pas non plus à B. Pourtant, cette même origine est dans l'adhérence de B. En erette, les points $O_n\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$ appartiennent tous à B, et toute boule ouverte centrée en $(0,0)$ contient un de ces points (puisque leur distance à l'origine tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$). Dans ce cas, B ne peut donc pas être fermé.

Exercice 2 (**)

Une caractérisation classique des sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^2$ est la suivante (elle se généralise d'ailleurs ailleurs que dans $\mathbb{R}^2$) : $D \subset \mathbb{R}^2$ est fermé si et seulement si toute suite convergente de points de D a une limite appartenant à D. En effet, si D est un fermé, et qu'on note (u_n) une telle suite convergente, et l sa limite (ici l est un élément de $\mathbb{R}^2$), alors toute boule ouverte centrée en l contient des éléments de la suite (u_n) (et même une infinité, par définition de la limite, à partir d'un certain rang, **tous** les termes de la suite seront dans cette boule ouverte), donc des éléments de D. Comme D est fermé, cela implique que $l \in D$. Réciproquement, si D n'est pas fermé, cela signifie qu'on peut trouver un élément $l \in \mathbb{R}^2 \backslash D$ pour lequel toute boule ouverte centrée en l a une intersection non vide avec D. Soit l un tel élément, alors $B\left(l, \frac{1}{n}\right) \cap D$ contient au moins un élément, on en choisit un qu'on note u_n. Par construction, $d(u_n, l) < \frac{1}{n}$ donc (u_n) converge vers l, et (u_n) est une suite d'éléments de D, ce qui prouve la réciproque de notre propriété.

On peut maintenant l'appliquer au graphe G de notre fonction continue sur $\mathbb{R}$. Soit $u_n = (x_n, f(x_n))$ une suite d'éléments de G qui converge dans $\mathbb{R}^2$. Alors nécessairement les abscisses x_n forment une suite convergente dans $\mathbb{R}$, de limite l. La continuité de la fonction f en l assure alors que $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(l)$, et donc que la suite (u_n) converge vers le point $(l, f(l))$ qui appartient bien à G. Notre graphe G est donc bien un fermé de $\mathbb{R}^2$. La réciproque n'est absolument pas vraie. Par exemple la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 42$ a un graphe fermé (constitué de trois morceaux disjoints), mais n'est pas du tout continue.

Exercice 3 (*)

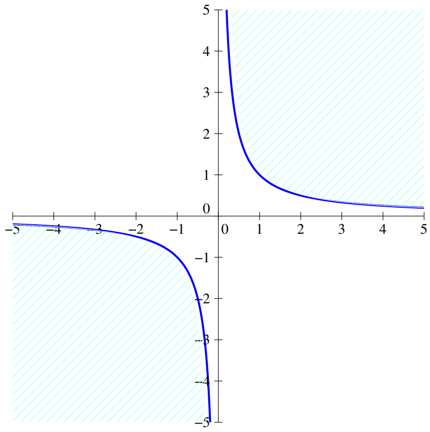
C'est trivial : $B(A, r) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_f\left(A, r - \frac{r}{n}\right)$ (on se contente de prendre des boules fermées de même centre dont le rayon tend vers r et on obtient bien une réunion égale à la boule ouverte de rayon r).

Exercice 4 (*)

1. A_1 est un quart de plan ouvert, qui comme on nom l'indique est ouvert. Si on veut être rigoureux : si $A(x, y) \in A_1$, alors $x > 0$ et $y > 0$. On note $\varepsilon = \min(x, y) > 0$, et $B(A, \varepsilon) \subset A_1$ (cette boule ne contient que des points dont les deux coordonnées sont strictement positives), ce qui prouve bien que A_1 est voisinage de chacun de ses points, donc $\mathring{A_1} = A_1$. Pour l'adhérence, on ajoute les deux demi-axes pour trouver $\overline{A_1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0\}$. En effet, tous les points de A_1 appartiennent à son adhérence. De plus, un point de la forme $(0, y)$, avec $y \geqslant 0$ a des boules ouvertes qui rencontrent toujours A_1 (puisqu'elles contiennent des points de la forme $\left(\frac{r}{2}, y + \frac{r}{2}\right)$ quelle que soit la valeur strictement positive du rayon r), donc il appartient à l'adhérence de A_1. De même pour un points de coordonnées $(x, 0)$ avec $x \geqslant 0$. Par contre, un poit ayant deux coordonnées strictement négatives n'est pas adhérent à A_1 (on fait le même raisonnement que pour prouver que A_1 est un ouvert : on note $\varepsilon = \min(-x, -y) > 0$ et $B(A, \varepsilon)$ ne coupe pas A_1).
2. L'intérieur et l'adhérence de A_2 sont les mêmes que ceux de A_1 (avec des raisonnements identiques).
3. Il est assez facile ici de constater que A_3 est d'intérieur vide. Si on prend un point de coordonnées $\left(x, \frac{1}{x}\right)$ appartenant à A_3, toute boule ouverte centrée en ce point contiendra des points de la forme $\left(x + a, \frac{1}{x}\right)$ (avec a inférieur au rayon de la boule) qui n'appartiennent pas à A_3. Il est à peu près aussi facile de se convaincre que A_3 est un ensemble fermé. Le plus simple est d'utiliser la caractérisation donnée pour l'exercice 2 : si (A_n) est une suite convergente de points de A_3, alors A_n a pour coordonnées $\left(x_n, \frac{1}{x_n}\right)$, avec (x_n) qui est une suite convergente. Si (x_n) a une limite non nulle l, alors $\lim \frac{1}{x_n} = \frac{1}{l}$, donc la suite (A_n) converge vers le point de coordonnées $\left(l, \frac{1}{l}\right)$ qui appartient bien à A_3. Et si $l = 0$, alors la suite ne peut pas converger

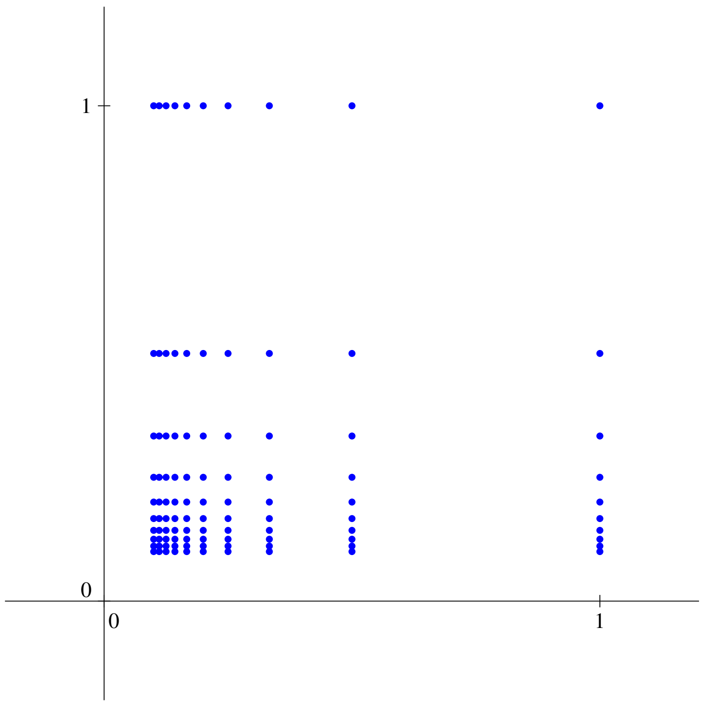
puisque les ordonnées des points n'ont pas une limite finie. On en déduit donc que A_3 est fermé et que $\overline{A_3} = A_3$.

4. Cette fois-ci, l'ensemble est ouvert, on ne fera pas une démonstration rigoureuse (c'est un peu plus compliqué pour cet ensemble et le suivant avec le peu d'outils vus en cours), mais simplement un dessin (A_4 est le domaine hachuré en bleu ciel, sans la courbe bleu foncé) :



Son intérieur est donc égal à A_4 lui-même, et son adhérence obtenue en ajoutant le bord fermé étudié à la question précédente : $\overline{A_4} = A_4 \cup A_3$.

5. Là encore, on se contentera d'un bon dessin, où on a simplement représenté les points pour $1 \leqslant n, p \leqslant 10$.

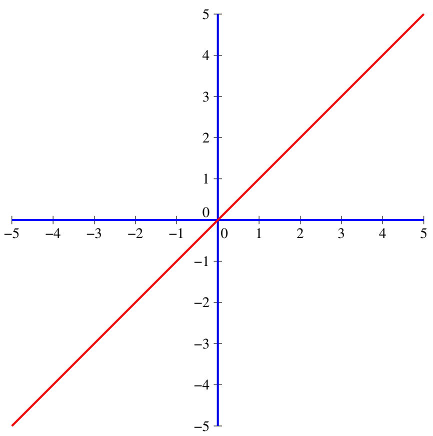


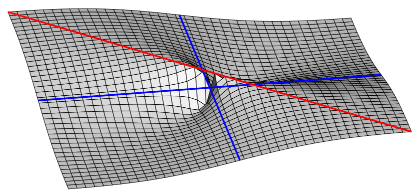
Il est assez facile de voir que l'ensemble est d'intérieur vide : il est inclus dans $\mathbb{Q}^2$ et toute boule ouverte de $\mathbb{R}^2$ contient des points à coordonnées irrationnelles. L'adhérence peut se visualiser sur le dessin : on ajoute à A_5 tous les points de la forme $\left(0, \dfrac{1}{p}\right)$, qui sont limites de suites $\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{p}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de points de A_5, on ajoute de même les points de coordonnées $\left(\dfrac{1}{n}, 0\right)$, et il faut enfin ajouter aussi l'origine du repère, qui est par exemple limite de la suite de points de coordonnées $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ qui appartiennent bien à A_5. Avec un peu de mauvaise fois, en considérant que $\frac{1}{\infty} = 0$, on peut donc dire que $\overline{A_5} = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{p}\right) \mid (n,p) \in (\mathbb{N}^* \cup \{\infty\})^2 \right\}$.

6. Ce dernier ensemble est beaucoup plus facile que les précédents : il est d'intérieur vide (toute boule ouverte de $\mathbb{R}^2$ contient des points dont l'abscisse n'est pas rationnelle), et d'adhérence égale à $\mathbb{R}^2$ tout entier (tout boule ouverte contient un rectangle de la forme $[a,b] \times [c,d]$, et on peut toujours trouver un rationnel dans l'intervalle $[a,b]$ et un irrationnel dans $[c,d]$, donc un élément de A_6 dans notre boule).

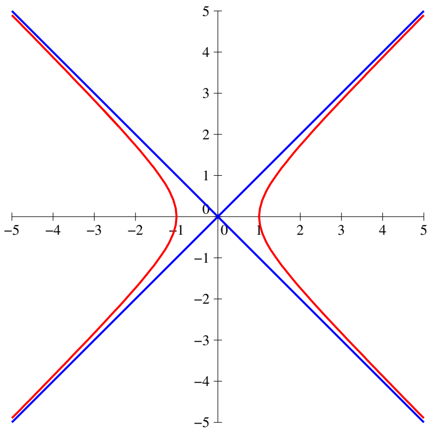
Exercice 5 (**)

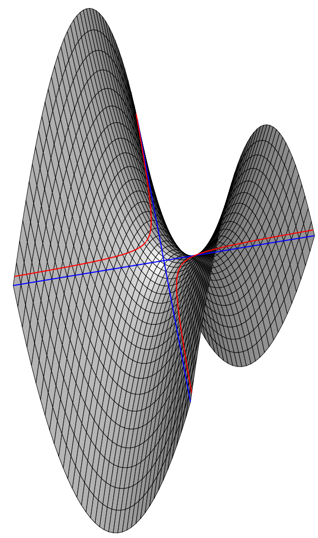
1. On a $f(x,y) = 0$ si $x = 0$ ou $y = 0$, donc sur les deux axes. Attention tout de même, il faut enlever de cet ensemble l'origine $(0,0)$ qui n'appartient pas au domaine de définition de f. Pour la ligne de niveau $\frac{1}{2}$, $f(x,y) = \frac{1}{2}$ si $x^2 + y^2 = 2xy$, donc si $(x-y)^2 = 0$, ce qui arrive si $x = y$. La ligne de niveau est donc la droite d'équation $y = x$, toujours privée de l'origine. Ci-dessous, les lignes de niveau (0 en bleu, $\frac{1}{2}$ en rouge) et la surface correspondante :



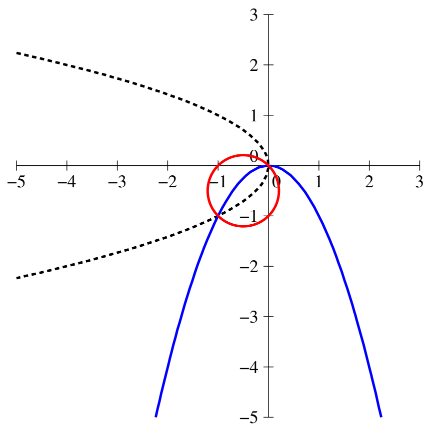


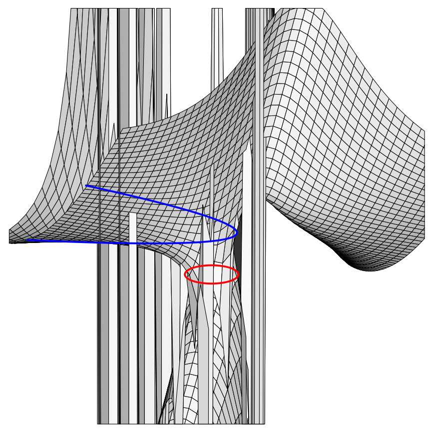
2. La ligne de niveau 0 est obtenue quand $x^2 = y^2$, donc il s'agit de l'union des deux droites d'équation $y = x$ et $y = -x$. Pour la ligne de niveau 1, c'est plus compliqué puisqu'on ne sait pas vraiment à quoi ressemble la courbe d'équation $x^2 - y^2 = 1$. Il s'agit en fait d'une hyperbole, ce qu'on peut visualiser en effectuant le changement de variable $X = x + y$ et $Y = x - y$ pour obtenir l'équation $XY = 1$, donc $Y = \frac{1}{X}$. Ce changement de variable revient en gros à tourner les axe de 45 degrés. Ci-dessous, ligne de niveau 0 en bleu, ligne de niveau 1 en rouge :



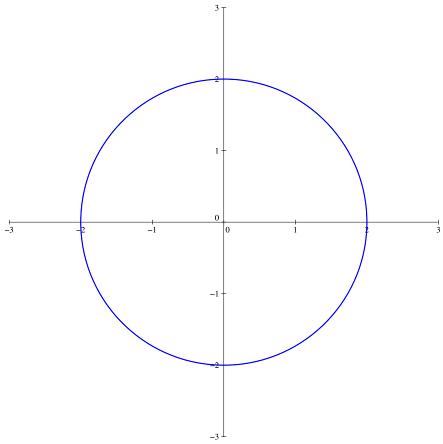


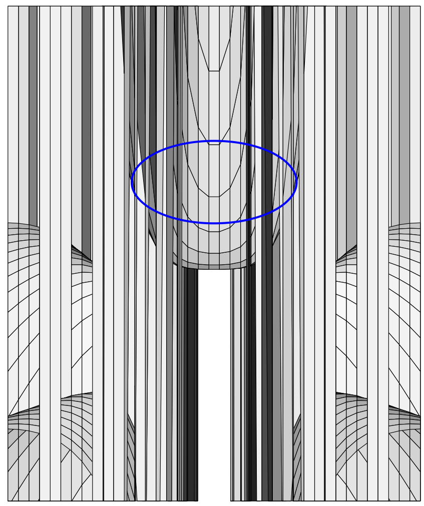
3. Ici, le domaine de définition de la fonction est assez moche, puisqu'on a un ensemble de points interdits parcourant la parabole d'équation $x = -y^2$ (qui sera représentée en pointillés noirs ci-dessous). La ligne de niveau 0 est elle-aussi une parabole, d'équation $y = -x^2$ (donc orientée dans un sens plus habituel). La ligne de niveau -1 est obtenue quand $x^2 + y + x + y^2 = 0$, donc $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$, ou encore $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$. On reconnait le cercle de centre $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ce cercle passe par l'origine). Il faudrait bien sûr enlever à ces lignes de niveau les points communs avec la parabole de points interdits. Sur le dessin ci-dessous, la surface est plus ou moins vue du dessous, mais la présence de nombreuses valeurs interdites rend les choses assez illisibles avec ce que j'utilise pour tracer les surfaces.



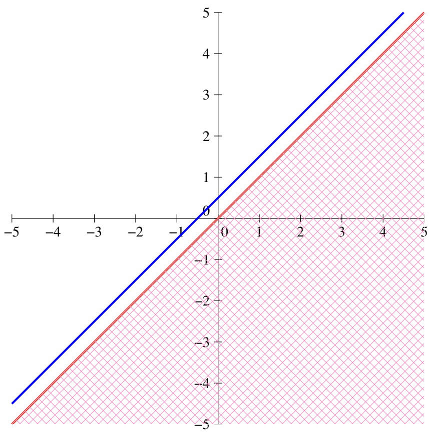


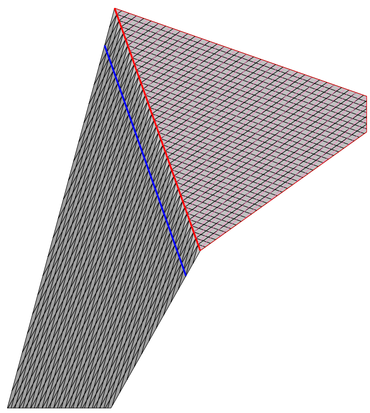
4. Encore une fonction dont le domaine de définition est non trivial, on ne va donc pas s'en préocupper ($x^2y^2 = 8$ se produit si $xy = \pm 2\sqrt{2}$, on devrait donc avoir des points interdits situés sur deux hyperboles...). Une seule ligne de niveau demandée, d'équation $16 - 2x^2y^2 = x^4 + y^4$, donc $(x^2 + y^2)^2 = 16$. Dans la mesure où $x^2 + y^2$ peut difficilement être rendu négatif, cela se produit quand $x^2 + y^2 = 4$, ce qui est exactement l'équation du cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 2. Encore une surface rendue peu lisible par les nombreuses valeurs interdites.





5. Cette fois-ci, aucun problème de domaine de définition. La ligne de niveau 1 a pour équation $|x-y| = x-y+1$. Cela ne peut pas se produire si $x-y \geqslant 0$, donc on a une première condition : $x < y$. En la supposant vérifiée, on veut simplement $y-x = x-y+1$, soit $2y = 2x+1$, ou encore $y = x + \frac{1}{2}$. On obtient donc la droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ (entière puisque sur cette droite, l'inégalité $x < y$ est manifestement toujours vérifiée). La ligne de niveau 0 donne l'équation $|x-y| = x-y$, qui est vérifiée dès que $x-y \geqslant 0$, c'est-à-dire sur tout le demi-plan $x \geqslant y$. Enfin, $f(x,y) = 1$ si $|x-y| = x-y-1$. Comme $x-y$ est un nombre réel, $|x-y| \geqslant x-y$, donc cette équation est impossible, la ligne de niveau correspondante est vide (en fait f ne peut prendre que des valeurs négatives ou nulles). Ci-dessous, la ligne de niveau -1 est en bleu et le demi-plan de niveau 0 hachuré en rose, avec sa frontière en rouge (admirez le rendu bien vomitif sur la version 3D) :

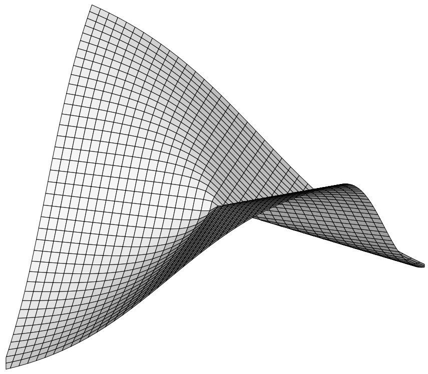




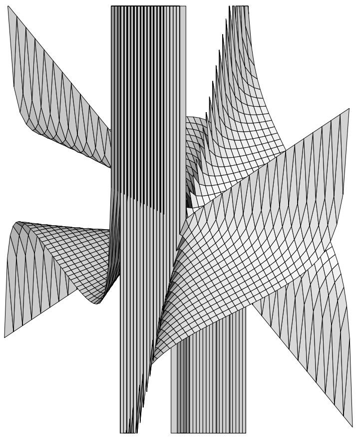
Exercice 6 (**)

À chaque fois, on donne après l'étude du prolongement en $(0,0)$ une allure de la surface représentative de la fonction, qui n'était bien sûr pas demandée dans l'exercice.

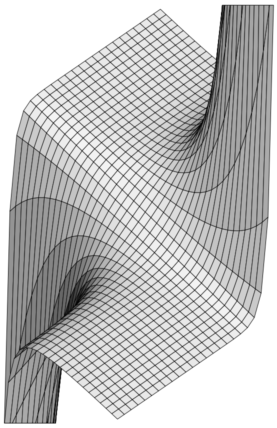
- Passons donc en coordonnées polaires : $f(r,\theta) = \dfrac{r\cos(\theta) \times r\sin(\theta)}{r} = r\cos(\theta)\sin(\theta)$, donc $|f(r,\theta)| \leqslant r$, ce qui prouve que f peut être prolongée par continuité en posant $f(0,0) = 0$.



- Même pas vraiment besoin de passer en polaires ici puisque la fonction n'est pas définie sur les droites d'équation $y = x$ et $y = -x$, ce qui va déjà poser un problème insurmontable pour un prolongement par continuité. On peut quand même écrire $f(r, \theta) = \dfrac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)} = \dfrac{\sin(2\theta)}{2\cos(2\theta)} = \dfrac{\tan(2\theta)}{2}$, qui n'a bien sûr pas une limite finie unique, le prolongement est comme prévu impossible. D'ailleurs, l'allure de surface représentée par mon petit logiciel ne ressemble vraiment à rien !

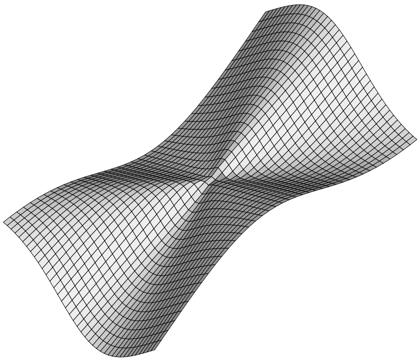


- Ici, le passage en polaire ne servirait strictement à rien, mais on peut simplement écrire, en utilisant le développement limité de l'exponentielle en 0, que $f(x, y) \underset{(x,y)\mapsto(0,0)}{=} \dfrac{1 + xy + o(xy) - 1}{x} = y + o(y)$ (la variable xy ayant bien sûr une limite nulle si x et y tendent vers 0 tous les deux). Cela suffit largement à assurer la possibilité de prolonger par continuité en posant $f(0, 0) = 0$.

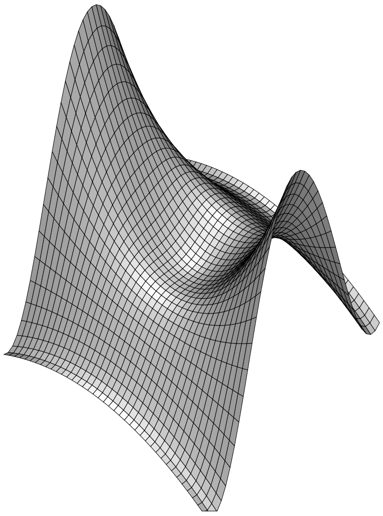


- On revient à nos classiques avec des coordonnées polaires : $f(r, \theta) = \dfrac{r^3\cos^2(\theta) + r^2\sin^3(\theta)}{r^2} =$

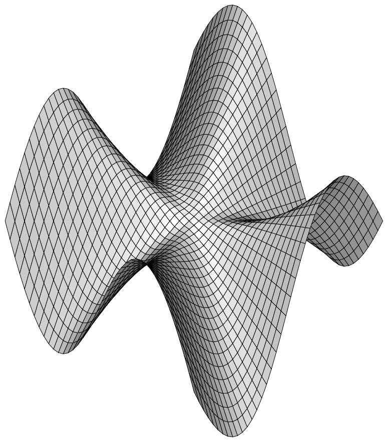
$r(\cos^3(\theta) + \sin^3(\theta)) = O(r)$, on peut donc prolonger par continuité en posant $f(0,0) = 0$.



- Cette fois-ci, retour aux développements limités usuels : $\dfrac{\sin(y)}{y} \underset{y \to 0}{=} 1 - \dfrac{1}{6}y^2 + o(y^2)$, donc $f(x,y) = 1 + o(y^2)$, on peut prolonger par continuité en posant $f(0,0) = 1$ (la présence du facteur $1 + x^2 + y^2$ au numérateut n'a absolument aucune influence sur le calcul).

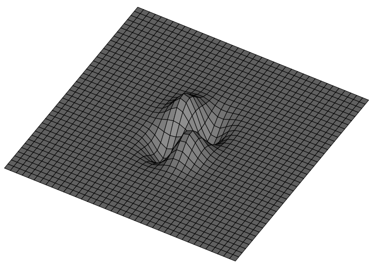


- Encore un coup de coordonnées polaires : $f(r,\theta) = \dfrac{r^4 \sin(\theta)\cos(\theta)(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))}{r^2} = O(r^2)$, on peut sans problème prolonger par continuité en posant $f(0,0) = 0$. Ce prolongement est-il $\mathcal{C}^1$? Pour cela, on calcule les deux dérivées partielles (ailleurs qu'en $(0,0)$) et on regarde si elle-même sont prolongeables par continuie en $(0,0)$ (une sorte d'analogue à deux dimensions du théorème de prolongement de la dérivée). Calculons donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - 2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$. Sans même chercher à écrire le détail des calculs, après passage en coordonnées polaires, le dénominateur sera égal à r^4 et le numérateur sera manifestement en $O(r^5)$ (il n'y a que des termes polynômiaux de degré 5), donc le quotient en $O(r)$ peut encore être prolongé par continuité, toujours en posant $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Le calcul pour l'autre dérivée partielle est quasiment identique, on peut d'ailleurs s'en dispenser en invoquant l'antisymétrie des formules obtenues par rapport aux deux variables x et y. La fonction f est donc bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.



Exercice 7 (**)

On sait qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui admet des limites finies en $+\infty$ et en $-\infty$ est bornée (résultat classique utilisant la définition des limites et le théorème du maximum). On aimerait avoir l'équivalent pour une fonction à deux variables, car on a bien envie de dire ici que $f(x,y)$ va « toujours tendre vers 0 quand (x,y) s'éloigne vers l'infini » (par croissance comparée). Mais cette propriété reste bien floue, et on ne dispose de toute façon pas des théorèmes qui permettraient ensuite de conclure rapidement. Du coup, on va magouiller. En posant $t = x^2+y^2$, on constate que $t-2xy = (x-y)^2 \geqslant 0$ et $t+2xy = (x+y)^2 \geqslant 0$, donc $t \geqslant \max(2xy, -2xy) = 2|xy|$. De plus, $1+e^{x^2+2y^2} \geqslant 1+e^{x^2+y^2} = 1+e^t \geqslant e^t$, donc on peut toujours écrire $|f(x,y)| = \dfrac{|xy|}{1+e^{x^2+2y^2}} \leqslant \dfrac{t}{2e^t}$, pour un certain $t \in \mathbb{R}^+$. On pose alors simplement $g(t) = \dfrac{t}{2e^t} = \dfrac{te^{-t}}{2}$ et on étudie les variations de la fonction g : g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g'(t) = \dfrac{e^{-t}-te^{-t}}{2} = \dfrac{(1-t)e^{-t}}{2}$, la fonction g est donc croissante sur $[0,1]$ puis décroissante sur $[1,+\infty[$, avec $g(0) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0$ par croissance comparée. Elle atteint un maximum en 1, et on peut affirmer que $|f(x,y)| \leqslant g(1)$, ce qui suffit à prouver que f est une fonction bornée (même pas besoin de donner la valeur explicite du maximum, qui n'a aucun intérêt). En pratique, la surface représentative de g s'écrase très rapidement vers 0 quand on s'éloigne du point $(0,0)$ (l'échelle du dessin ci-dessous est très déséquilibrée, les valeurs maximales et minimales de f étant de l'ordre de 0.1) :



Exercice 8 (**)

Même pas besoin de règle de la chaîne ici pour calculer les dérivées, c'est une simple composée « classique » : $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{y}{x^2} f'\left(\dfrac{y}{x}\right)$. De même, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{x} f'\left(\dfrac{y}{x}\right)$. On en déduit $x\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) +$

$y\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{y}{x}f'\left(\dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{y}{x}f'\left(\dfrac{y}{x}\right) = 0.$

Le deuxième calcul est du même type, mais avec un produit à dériver en plus : $\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{y}{x}\right) - \dfrac{y}{x^3}y'\left(\dfrac{y}{x}\right)$, et $\dfrac{\partial G}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{x^2}f'\left(\dfrac{y}{x}\right)$. L'équation demandée en découle une nouvelle fois directement (qui a mis deux étoiles à un exercice aussi trivial ?).

Exercice 9 (*)

En posant $h(x) = f(x,x)$, on peut appliquer la règle de la chaîne (première version) pour calculer $h'(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,x)$. On applique maintenant à nouveau la règle de la chaîne pour calculer $g'(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, f(x,x)) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, f(x,x)) \times h'(x)$. Autrement dit, $g'(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, f(x,x)) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, f(x,x)) \times \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,x)\right)$.

Pour le deuxième calcul, on pose $H(x,y) = (x, f(x,y))$ et on utilise la deuxième version de la règle de la chaîne : $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, f(x,y)) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, f(x,y)) \times \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, f(x,y)) \times \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Exercice 10 (**)

1. On calcule bien sûr $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x+y}(x-y+1) + e^{x+y} = e^{x+y}(x-y+2)$, et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x+y}(x-y+1) - e^{x+y} = e^{x+y}(x-y)$. En particulier, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Puisque $f(0,0) = 1$, le plan tangent en $(0,0)$ a donc pour équation $z = 2x + 1$.
2. Pour avoir un plan tangent parallèle à celui d'équation $x = y+z$, il faudrait avoir $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -1$ (à coefficient de z fixé, les équations de plans parallèles diffèrent simplement d'une constante). Cela impliquerait en particulier $x - y + 2 = -(x-y)$, donc $2x - 2y + 2 = 0$, ou encore $x - y = -1$. Il suffit alors que la condition supplémentaire $e^{x+y} = 1$ soit vérifiée, soit $x + y = 0$, donc $y = -x$. Combiné à la première condition obtenue, cela impose $2x = -1$, donc $x = -\dfrac{1}{2}$ et $y = \dfrac{1}{2}$. Il existe donc exactement un plan tangent de f parallèle au plan d'équation $x = y+z$. Comme $f\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) = 0$, il a d'ailleurs pour équation $z = x - \dfrac{1}{2} - y + \dfrac{1}{2}$, il s'agit donc du plan d'équation $x = y + z$ lui-même.

Exercice 11 (***)

1. On pose donc $f(x,y) = g(u,v) = g(x+y, x-y)$, et on calcule en exploitant la règle de la chaîne (deuxième version) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial g}{\partial v}$ (on multiplie chacun des deux termes par 1), et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial u} - \dfrac{\partial g}{\partial v}$. L'équation devient alors $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \dfrac{1}{2}g(u,v)$. On sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{2}y$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ke^{\frac{1}{2}x}$, avec $K \in \mathbb{R}$. Ici, on aura ce type de fonction à v fixé, ce qui donne finalement $g(u,v) = K(v)e^{\frac{1}{2}u}$, avec K une

fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de la variable v. On peut donc écrire les solutions de l'équation initiale sous la forme $f(x,y) = K(x-y)e^{\frac{x+y}{2}}$. La condition supplémentaire impose que $K(x)e^{\frac{1}{2}x} = \sin(x)$, donc $K(x) = \sin(x)e^{-\frac{1}{2}x}$, puis $f(x,y) = \sin(x-y)e^{\frac{y-x}{2}}e^{\frac{x+y}{2}} = \sin(x-y)e^y$. Il y a donc une unique solution au problème posé.

2. Même technique : on pose $f(x,y) = g(u,v)$ mais on calcule dans l'autre sens $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} + u\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial y}$. Comme $u = x$, on a donc $\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}$ (le calcul de la deuxième dérivée partielle était même inutile). On est donc ramenés à la résolution de l'équation $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = u + \frac{1}{2}u^2 + v$. Il suffit de « primitiver par rapport à u » en faisant tout de même attention au fait que la constante d'intégration peut ici dépendre de v. Autrement dit, $g(u,v) = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + uv + h(v)$, où h est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de la variable v. En remontant le changement de variable (on a $u = x$ et $v = y - \frac{1}{2}u^2 = y - \frac{1}{2}x^2$), $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + xy - \frac{1}{2}x^3 + h\left(y - \frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + xy + h\left(y - \frac{1}{2}x^2\right)$. Il est temps de rajouter la condition imposée : $y = f(0,y) = h(y)$, donc finalement $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + xy + y - \frac{1}{2}x^2 = xy + y - \frac{1}{3}x^3$, solution unique une fois de plus.

3. On ne change pas une méthode qui marche : posons $f(x,y) = g(u,v)$ et calculons $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{1}{v}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{v^2}{u^2}\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial g}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{v}{u}\frac{\partial f}{\partial y}$. En notant (1) et (2) ces deux relations, on peut effectuer l'opération $\frac{u}{v}\times(1) + (2)$ pour obtenir $\frac{v}{u}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{u}{v}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$. Comme $y = \frac{v^2}{u}$, on en déduit $y\frac{\partial f}{\partial y} = u\frac{\partial g}{\partial u} + v\frac{\partial g}{\partial v}$. On calcule ensuite de même $\frac{2u}{v}(1) + (2)$ pour trouver $\frac{u}{v^2}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2u}{v}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$. Comme $x = \frac{u}{v}$, on en déduit $x\frac{\partial f}{\partial x} = 2u\frac{\partial g}{\partial u} + v\frac{\partial g}{\partial v}$. L'équation à résoudre se résume donc à $u\frac{\partial g}{\partial u} = 0$. Comme u ne peut pas s'annuler (par exemple car $u = x^2y$), on en déduit tout simplement que $\frac{\partial g}{\partial u} = 0$, c'est-à-dire que $g = h(v)$, avec h une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. Comme $v = xy$, on peut alors conclure que $f(x,y) = h(xy)$, qui vérifie en effet trivialement l'équation proposée.

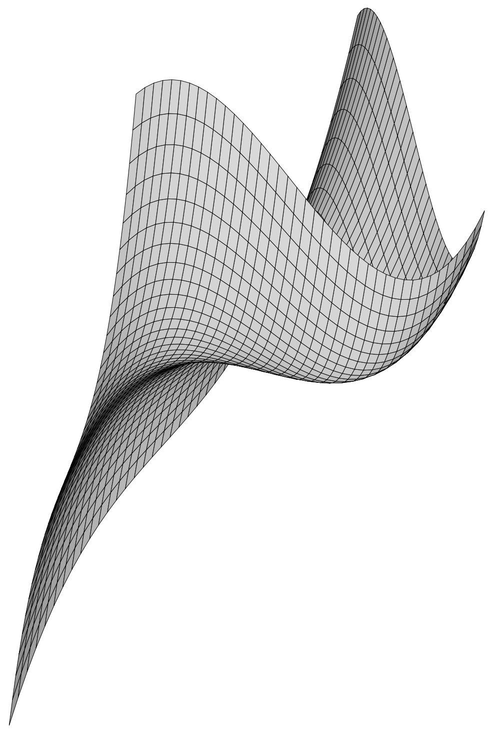
Exercice 12 (* à **)

Chacune des fonctions de l'exercice est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, on étudiera dans chaque cas les points critiques.

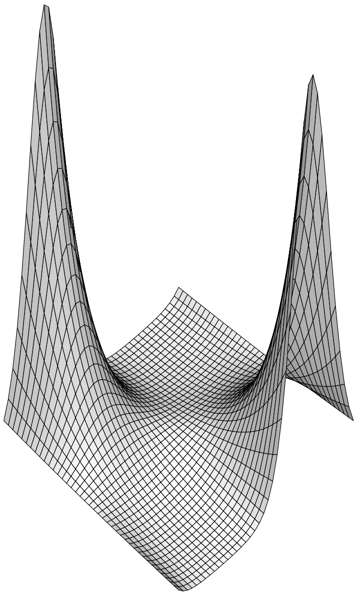
1. $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 10x - 4y - 6$ et $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -4x + 2y + 2$. Le seul point critique de f est obtenu en résolvant un système de deux équations à deux inconnues. On effectue l'opération $L_1 + 2L_2$ pour obtenir $2x - 2 = 0$ donc $x = 1$, et on en déduit $y = 1$. Il y a donc un seul point fixe : $(1,1)$. La fonction f_1 étant définie par une équation de degré 2, on s'attend à avoir un minimum global (on a déjà effectué plusieurs études de ce type). Calculons $f_1(1,1) = 5 - 4 + 1 - 6 + 2 = -2$, puis $f_1(1+h,1+k) + 2 = 5(1+h)^2 - 4(1+h)(1+k) + (1+k)^2 - 6(1+h) + 2(1+k) + 2 = 5 + 10h + 5h^2 - 4 - 4h - 4k - 4hk + 1 + 2k + k^2 - 6 - 6h + 2 + 2k + 2 = 5h^2 - 4hk + k^2 = (k-2h)^2 + h^2 \geqslant 0$, ce qui prouve bien qu'on a toujours $f_1(x,y) \geqslant -2$ et donc que -2 est un minimum global.

2. $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y$ et $\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x$. Si (x,y) est un point critique, alors $x = y^2$ et $y = x^2$, donc $x = x^4$, soit $x(x^3 - 1) = 0$. Les seules valeurs possibles sont donc $x = 0$, qui

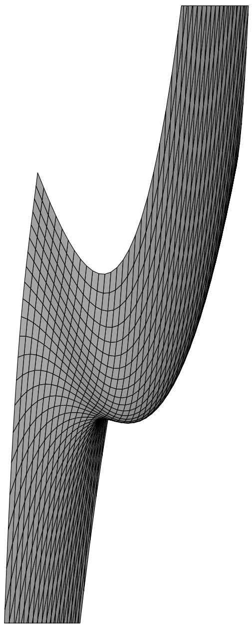
implique $y = 0$, et $x = 1$ qui implique $y = 1$. La fonction f_2 a donc deux points critiques : $(0,0)$ et $(1,1)$. Il est facile de constater que $(0,0)$ n'est pas un extrêmum local (ni a fortiori global) car la fonction partielle $x \mapsto f(x,0) = x^3$ n'admet pas d'extrêmum en 0. Par contre, $(1,1)$ est un minimum local, mais ce n'est pas si facile à prouver (ici, le minimum n'est pas global). Calculons tout de même $f_2(1,1) = -1$, puis $f_2(1+h,1+k)+1 = (1+h)^3+(1+k)^3-3(1+h)(1+k)+1 = 1+3h+3h^2+h^3+1+3k+3k^2+k^3-3-3h-3k-3hk+1 = 3h^2+h^3+3k^2+k^3-3hk$. Quitte à prendre h et k suffisamment proches de 0, les termes h^3 et k^3 sont négligeables par rapport aux autres, et comme $h^2+k^2-2hk \geqslant 0$, $hk \leqslant \dfrac{h^2+k^2}{2}$, ce qui prouve que $3h^2+3k^2-3hk > 0$ au voisinage de $(0,0)$, et donc que f_2 admet un minimum local en $(1,1)$ (la rédaction n'est pas parfaitement rigoureuse, mais l'idée est que le développement limité à l'ordre 2 de la fonction permet de connaitre son signe local quand les termes d'ordre 1 s'annulent, exactement comme pour une fonction à une variable). L'allure de la surface représentant f_2 :



3. $\dfrac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) = \sin(y)e^{x\sin(y)}$ et $\dfrac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) = x\cos(y)e^{x\sin(y)}$. Comme $\cos(y)$ et $\sin(y)$ ne peuvent pas être tous les deux nuls en même temps, les point critiques vérifient tous $x = 0$, et donc $\sin(y) = 0$, soit $y = k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. On a une infinité de points critiques, pour lesquels $f_3(0,k\pi) = e^0 = 1$. Tous ces points ont la même nature que le point $(0,0)$ puisque la fonction est périodique par rapport à la variable y. Or, f_3 n'a pas d'extremum local au voisinage de $(0,0)$: $e^{x\sin(y)} \underset{y\to 0}{=} e^{xy+o(xy)} \underset{(x,y)\to(0,0)}{=} 1+xy+o(xy)$, donc $f_3(x,y)-1 \sim xy$ n'est pas de signe constant au voisinage de $(0,0)$.



4. $\dfrac{\partial f_4}{\partial x}(x,y) = 2(x-y) + 3(x+y)^2$ et $\dfrac{\partial f_4}{\partial y}(x,y) = -2(x-y) + 3(x+y)^2$. La somme des deux équations obtenues montre qu'un point critique vérifie nécessairement $(x+y)^2 = 0$, donc $y = -x$, mais la différence donne $x - y = 0$ donc $y = x$. Finalement, le seul point critique possible est l'origine $(0,0)$. On a bien sûr $f_4(0,0) = 0$, et au voisinage de $(0,0)$, $f_4(x,y)$ est du signe de $(x-y)^2$, donc positif (comme toujours, la rédaction ici n'est guère rigoureuse). Il y a donc un minimum local à l'origine pour f_4.



Exercice 13 (**)

1. On développe tout simplement : $f(x,y) = 1 + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} + 1 = 2 + \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$, puis on remet au même dénominateur pour trouver $f(x,y) = \dfrac{2xy + y^2 + x^2}{xy} = \dfrac{(x+y)^2}{xy}$.

2. La fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ouvert de définition, et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y}$ (en reprenant la première version de la question 1), et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}$. En mettant au même dénominater les deux dérivées partielles, le point $a(x,y)$ est donc point critique si et seulement si $x^2 - y^2 = y^2 - x^2 = 0$. Autrement dit, on doit simplement avoir $x = y$, et tous les points de coordonnées (x,x) pour $x \in]0, +\infty[$ sont donc points critiques pour f.
3. Commençons par constater que $f(x,x) = 4$ quelle que soit la valeur de x. De plus, $(x+y)^2 - 4xy = x^2 + y^2 - 2xy = (x-y)^2 \geqslant 0$, donc $(x+y)^2 \geqslant 4xy$, ce qui prouve, en reprenant la deuxième formule de la question 1, qu'on a toujours $f(x,y) \geqslant 4$ (tout est positif, on peut diviser sans risque nos inégalités par xy). La valeur 4 est donc un minimul global pour f, qui est atteint en tous ses points critiques.

Exercice 14 (**)

1. La fonction $g : x \mapsto e^{-x} - x$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions décroissantes, donc bijective. De plus, $\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ (même pas de forme indéterminée) et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ (toujours pas de problème !). La fonction est donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et s'annule donc une seule fois. Comme $g(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$ et $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{2} > 0$ (puisque $e < 4 \Rightarrow \sqrt{e} < 2$), le théorème des valeurs intermédiaires assure que g s'annule sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$, et donc que l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$ se trouve dans cet intervalle.
2. On calcule bien sûr $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y - e^{-x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x + 4y$. Un point critique vérifie donc $-2x + 4y = 0$, soit $y = \frac{1}{2}x$, et en reportant dans la première équation $x - e^{-x} = 0$. On a vu à la question précédente que cette équation admet une unique solution (qu'on va donc noter x_0), le seul point critique de f est donc $\left(x_0, \frac{1}{2}x_0\right)$.
3. On calcule bêtement : $f\left(x_0, \frac{1}{2}x_0\right) = x_0^2 - x_0^2 + \frac{1}{2}x_0^2 + e^{-x_0} = \frac{1}{2}x_0^2 + x_0$ en reprenant l'équation définissant x_0.

Exercice 15 (**)

1. Un calcul particulièrement difficile : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x + 2y - 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y + 2x - 1$.
2. La symétrie des équations montre qu'un point critique vérifiera nécessairement $y = x$. On reporte alors dans une des deux équations d'annulation des dérivées partielles pour obtenir $6x - 1 = 0$, donc $y = x = \frac{1}{6}$. Le seul point critique de f est $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.
3. Un calcul brutal : $2\left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2 = 2x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{8} + 2xy - x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{24} = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y + \frac{1}{6} = f(x,y) + \frac{1}{6}$.
4. Le calcul précédent prouve que $f(x,y) + \frac{1}{6} \geqslant 0$ puisqu'il s'agit d'une somme de deux carrés. Or, $f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$. On a donc prouvé que $f(x,y) \geqslant f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$, ce qui prouve qu'un minimum global est atteint en l'unique point critique de f.

5. On constate évidemment que $g(x,y) = f(e^x, e^y)$, donc g est minorée par $-\dfrac{1}{6}$, et atteint ce minimul lorsque $x = y = -\ln(6)$ (de façon à avoir $e^x = e^y = \dfrac{1}{6}$).

Exercice 16 (**)

La fonction f est bien définie sur l'ouvert $]0,+\infty[^2$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet ensemble. Calculons ses dérivées partielles : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{1+y} \times \dfrac{y(1+x)(x+y) - xy(x+y+1+x)}{(1+x)^2(x+y)^2} = \dfrac{y}{1+y} \times \dfrac{x+y+x^2+xy-x^2-xy-x-x^2}{(1+x)^2(x+y)^2} = \dfrac{y(y-x^2)}{(1+y)(1+x)^2(x+y)^2}$. Par symétrie, on aura de même $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x(x-y^2)}{(1+x)(1+y)^2(x+y)^2}$. Puisque $x \neq 0$ et $y \neq 0$, les seuls point critiques possibles sont ceux vérifiant $x = y^2$ et $y = x^2$, donc $x^4 = x$, ce qui ne se produit que pour $x = 1$. Il y a donc en fait un seul point critique pour f, de coordonnées $(1,1)$. On peut calculer $f(1,1) = \dfrac{1}{8}$. Par contre, on manque toujours de méthodes pour vérifier que f admet un extremum (en l'occurrence un maximum local) en ce point. On va donc tricher comme on le fera dans l'exercice suivant. La fonction f est prolongeable par continuité à $[0,+\infty[^2$ en posant $f(0,y) = f(x,0) = f(0,0) = 0$ (la seule valeur posant problème est celle en $(0,0)$ qui se trouve comme d'habitude en passant en coordonnées polaires : $f(x,y) = \dfrac{r\cos(\theta)\sin(\theta)}{(1+r\cos(\theta))(1+r\sin(\theta))(\cos(\theta)+\sin(\theta))}$, qui tend bien vers 0 en $(0,0)$, sachant que $\cos(\theta)+\sin(\theta) \geqslant 1$ pour des valeurs de x et de y toutes les deux positives). On dipose alors d'une fonction f qui est par exemple continue sur tout le carré fermé $[0,2]^2$, et qui y atteint nécessairement son maximum. Si ce maximum est atteint dans le carré ouvert $]0,2[^2$, c'est en un point critique, donc en $(1,1)$. Sinon, le maximum doit être atteint sur un des quatre côtés du carré. Ce n'est certainement pas sur les deux côtés où x ou y s'annulent, la fonction y est toujours nulle. Vérifions ce qui se passe sur les deux autres côtés (ou plutôt sur un seul par symétrie) en fixant $y = 2$ et en posant $g(x) = f(x,2) = \dfrac{2x}{3(x+1)(x+2)}$, fonction dont on va chercher le maximum sur l'intervalle $[0,2]$. La fonction g est dérivable, de dérivée $g'(x) = \dfrac{1}{3}\dfrac{2(x+1)(x+2) - 2x(2x+3)}{(x+1)^2(x+2)^2} = \dfrac{2(2-x^2)}{3(x+1)^2(x+2)^2}$. On en déduit directement que le maximum recherché est atteint en $x = \sqrt{2}$ et égal)à $g(\sqrt{2}) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3(1+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \dfrac{2\sqrt{2}(1-\sqrt{2})}{-3(2+\sqrt{2})} = \dfrac{4-2\sqrt{2}}{3(2+\sqrt{2})} = \dfrac{(4-2\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{6} = 2 - \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. Reste à savoir si cette valeur est inférieure à $\dfrac{1}{8}$, autrement dit si $\dfrac{4\sqrt{2}}{3} \geqslant \dfrac{15}{8}$. Cette condition est équivalente à $32\sqrt{2} \geqslant 45$, donc en élevant au carré à $2\ 048 \geqslant 2\ 025$, ce qui est vrai (mais pas de beaucoup !). On a donc prouvé que notre point critique correspondait bien à un maximum local (ouf !).

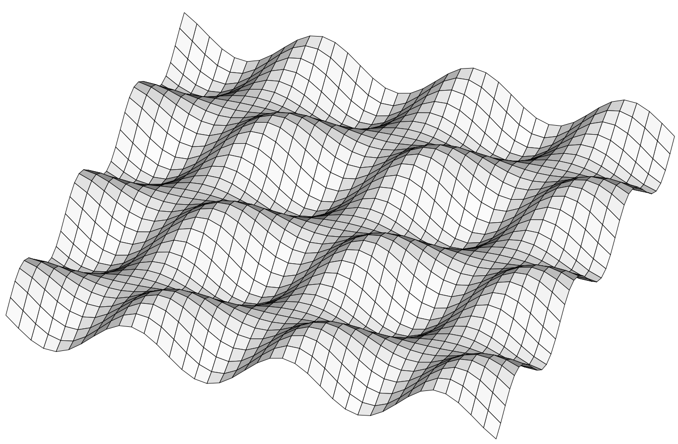
Exercice 17 (**)

1. Les valeurs prises par f étant toujours comprises entre -1 et 1 (produit de trois sinus eux-même compris dans cet intervalle), $f(\mathbb{R}^2)$ est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$, et bien sûr non vide (il contient par exemple $f(0,0) = 0$), donc il admet une borne supérieure.
2. On constate que $f(x+\pi, y+\pi) = (-\sin(x)) \times (-\sin(y)) \times \sin(x+y) = f(x,y)$. En fait, on a même plus simplement $f(x+\pi, y) = f(x, y+\pi) = f(x,y)$ (deux sinus sur les trois changent de signe à chaque fois), donc toutes les fonctions partielles associées à f sont périodiques de période π. On a donc plus généralement $f(x+n\pi, y+k\pi) = f(x,y)$ quels que soient les entiers (relatif) n et k. Or, quels que soient x et y, il existe un couple (n,k) tel que

$(x+n\pi, y+k\pi) \in [0,\pi]^2$ (la réunion des intervalles $[n\pi,(n+1)\pi]$ étant égale à $\mathbb{R}$ tout entier, x appartient à l'un d'eux, on soustrait alors $n\pi$ à x pour obtenir un réel appartenant à $[0,\pi]$, et de même pour y). Les valeurs prises par f sur $\mathbb{R}^2$ sont donc exactement les mêmes que celles prises par f sur C, et leur borne supérieure aussi.

3. La borne supérieure de f est égale au maximum atteint sur C d'après la question précédente. Mais ce maximum est nécessairement atteint soit sur un bord de C, soit dans son intérieur $]0,\pi[^2$. Cet intérieur étant ouvert, si le maximum y est atteint, ce sera nécessairement en un point critique de f.

4. Commençons déjà par constater que, sur les bords du carré C, la fonction f est toujours nulle (puisqu'on a soit $x=0$, soit $x=\pi$, soit $y=0$, soit $y=\pi$, ce qui annule un des sinus définissant f). Comme f atteint des valeurs strictement positives, par exemple pour $x=y=\dfrac{\pi}{4}$, notre maximum est donc forcément atteint en un point critique intérieur à C. Calculons alors les dérivées partielles de f : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin(y)(\cos(x)\sin(x+y)+\sin(x)\cos(x+y)) = \sin(y)\sin(2x+y)$. De même, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin(x)\sin(2y+x)$. Commes $\sin(x)$ et $\sin(y)$ ne peuvent pas s'annuler à l'intérieur de C, les points critiques correspondent aux couples (x,y) vérifiant $x+2y \equiv 0[\pi]$ et $2y+x \equiv 0[\pi]$. Avec $0<x,y<\pi$, les seules valeurs possibles pour $x+2y$ et $2x+y$ sont alors π et 2π. On a donc quatre possibilités : $2x+y=x+2y=\pi$, ce qui donne $x=y=\dfrac{\pi}{3}$, $2x+y=x+2y=2\pi$, qui donne $x=y=\dfrac{2\pi}{3}$, $2x+y=\pi$ et $x+2y=2\pi$ qui implique en soustrayant les équations $y-x=\pi$, ce qui est impossible, et la dernière condition symétrique qui ne peut pas non plus être vérifiée. On a donc deux points critiques dans l'intérieur de C. Il suffit de calculer les valeurs correspondantes pour savoir lequel correspond à notre maximum : $f\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right) = \sin^2\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$, et $f\left(\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right) = \sin^2\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. On a en fait calculé à la fois le minimum et le maximum de f, ce dernier vaut donc $\dfrac{3\sqrt{3}}{8} \simeq 0.65$. Pour conclure, une allure de la surface représentative de f, parce que c'est joli :

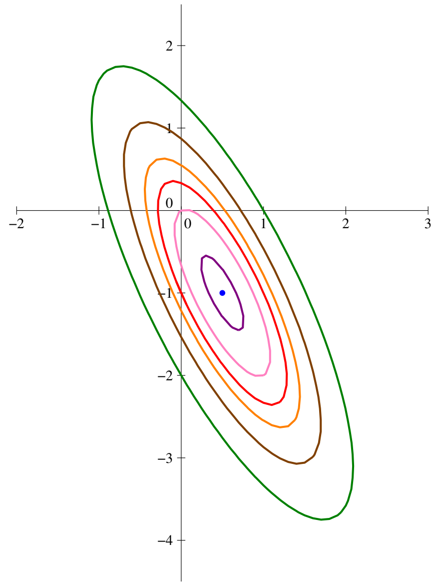


Exercice 18 (ESCP 1978, j'étais pas né) (**)

1. La fonction est évidemment définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, on va donc partir à la recherche d'éventuels points critiques. On calcul donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 18x+8y-1$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 8x+6y+2$.

Nos point critiques auront donc des coordoonnées solutions du système $\left\{\begin{array}{rcrcr} 18x & + & 8y & = & 1 \\ 4x & + & 3y & = & -1 \end{array}\right.$.
En additionnant les deux équations, on a $22x+11y=0$, donc $y=-2x$, on remplace ensuite dans la deuxième équation pour trouver $4x-6x=-1$, donc $x=\frac{1}{2}$, puis $y=-1$. Le seul point critiques est donc $\left(\frac{1}{2},-1\right)$. Si on est assez malin pour lire l'énoncé de la question 2 avant de traiter la question 1, on aura déjà deviné que $f\left(\frac{1}{2},-1\right)=\frac{9}{4}-4+3-\frac{1}{2}-2=-\frac{5}{4}$ correspond à un minimum global pour la fonction f. Du coup, histoire de ne pas faire deux calculs équivalents, on va directement calculer $f\left(x+\frac{1}{2},y-1\right)+\frac{5}{4}=9\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+8\left(x+\frac{1}{2}\right)(y-1)+3(y-1)^2-x-\frac{1}{2}+2y-2+\frac{5}{4}=9x^2+9x+\frac{9}{4}+8xy+4y-8x-4+3y^2-6y+3-x+2y-\frac{5}{4}=9x^2+8xy+3y^2$ (comme toujours dans ce type de calcul, les termes d'ordre 1 s'en vont, ce qui est normal puisqu'on fait un calcul au voisinage d'un point critique où le plan tangent est horizontal). Reste à factoriser partielle pour faire apparaitre la positivité : $g(x,y)=3\left(y+\frac{4}{3}x\right)^2-\frac{16}{3}x^2+9x^2=3\left(y+\frac{4}{3}x\right)^2+\frac{11}{3}x^2$, qui est toujours positif. Cela prouve que f ne prend que des valeurs supérieures ou égales à $-\frac{5}{4}$, qui constitue donc son minimum.

2. On vient de faire le calcul, inutile de recommencer.
3. On sait déjà que les lignes de niveau k seront vides pour $k<0$, et que la ligne de niveau 0 est réduite au point $(0,0)$. Si $k>0$, la ligne de niveau k a pour équation $9x^2+8xy+3y^2=k$, ou encore $\left(y+\frac{4}{3}x\right)^2+\frac{11}{9}x^2+\frac{k}{3}$. Quitte à poser avec une totale mauvaise foi $Y=y+\frac{4}{3}x$ et $X=\frac{\sqrt{11}}{3}X$, on reconnait une belle équation de cercle ! Mais dans la mesure où notre changement de variable n'est pas du tout une isométrie, les lignes de niveau seront en fait des « cercles déformés », c'est-à-dire des ellipses. On ne dispose pas des outils pour les caractériser géométriquement, contentons-nous d'un dessin, où on a tracé dans le plan les lignes de niveau de f (celles de g seraient les mêmes, quitte à décaler les valeurs et à déplacer les centres des ellipses à l'origine du repère) pour $k=-\frac{5}{4}$ (un seul point, en bleu), $k=-1$ (en violet), $k=0$ (en rose), $k=1$ (en rouge), $k=2$ (en orange), $k=4$ (en marron) et $k=8$ (en vert) :



Problème (**)

1. La variable X représente le nombre de choix qui n'ont encore été sélectionnés par personne au bout de n sondages.
2. Les variables X_i sont des variables de Bernoulli, il suffit donc de calculer la probabilité d'avoir $X_i = 1$ pour connaitre la loi. Or, $X_i = 1$ signifie que personne n'a choisi l'option i, ce qui se produit (indépendamment) avec probabilité $1 - p_i$ pour chaque personne. On a donc $\mathbb{P}(X_i = 1) = (1 - p_i)^n$, et $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - (1 - p_i)^n$.
3. Puisque $X = X_1 + X_2 + X_3$, la linéarité de l'espérance assure que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3) = (1 - p_1)^n + (1 - p_2)^n + (1 - p_3)^n$.
4. (a) Il suffit de se rappeler que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ et de remplacer $1 - p_3$ par $p_1 + p_2$ dans l'expression de la question précédente.

   (b) Calculons donc : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -n(1 - x)^{n-1} + n(x + y)^{n-1}$, et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -n(1 - y)^{n-1} + n(x + y)^{n-1}$.

   (c) Après simplification par n, (x, y) est point critique de f si $(1 - x)^{n-1} = (x + y)^{n-1} = (1 - y)^{n-1}$. Les trois réels $1 - x$, $1 - y$ et $x + y$ étant strictement positifs, cela ne peut se produire que si $1 - x = 1 - y = x + y$, donc $x = y = \dfrac{1}{3}$. Le seul point critique de f est donc $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

   (d) Comme pour les exercices précédents, on ne dispose pas de méthode simple, on peut certes calculer $f\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) = 3 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = \dfrac{2^n}{3^{n-1}}$, mais il est difficile de prouver que $f(x, y)$ est toujous supérieur à cette valeur sur $]0, 1[^2$. On va donc tricher en utilisant la même méthode que les exercices 16 et 17 : f atteint forcément un minimum sur l'ensemble fermé $[0, 1]^2$, qui est soit atteint à l'intérieur du carré et donc en son unique point critique, soit sur le bord de ce même carré. Explorons les quatre côtés du bord. Quand $x = 0$ ou $y = 0$, $f(x, y) = 1 + (1 - y)^n + y^n$ (ou pareil avec des x, le minimum sera le même), quand $x = 1$ (ou $y = 1$), $f(x, y) = (1 - y)^n + (1 + y)^n \geqslant 1 + y^n + (1 - y)^n$ (il suffit de développer $(1 + y)^n$ à l'aide du binôme de Newton pour s'en rendre compte, les termes extrêmes sont égaux à 1 et y^n et tous les autres sont positifs). Pour $n = 1$, la fonction est constante égale à 2, donc l'étude n'a aucun intérêt. Pour $n > 2$, $\dfrac{2^n}{3^{n-1}} < 1$, et $1 + y^n + (1 - y)^n > 1$, donc notre minimul potentiel reste inférieur à la valeur minimale sur les bords. Rest à gérer le cas $n=2$, où $\dfrac{2^n}{3^{n-1}}=\dfrac{4}{3}$, à comparer avec le minimum sur $[0,1]$ de la fonction $y \mapsto 1+(1-y)^2+y^2=2-2y+2y^2=2(1-y+y^2)$. La dérivée de cette fonction (au facteur 2 près) vaut $2y-1$, la valeur minimale est atteinte pour $y=\dfrac{1}{2}$, et vaut $2\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{3}{2}$. Cette valeur est plus grande que $\dfrac{4}{3}$, le minimul de f est donc toujours atteint en son point critique.

(e) Les questions précédentes prouvent que le minimum de $\mathbb{E}(X)$ est égal à $\dfrac{2^n}{3^{n-1}}$.