Entraînement pour le DS bilan : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

26 mai 2026

Exercice 1 (analyse, fonction trigonométriques réciproques)

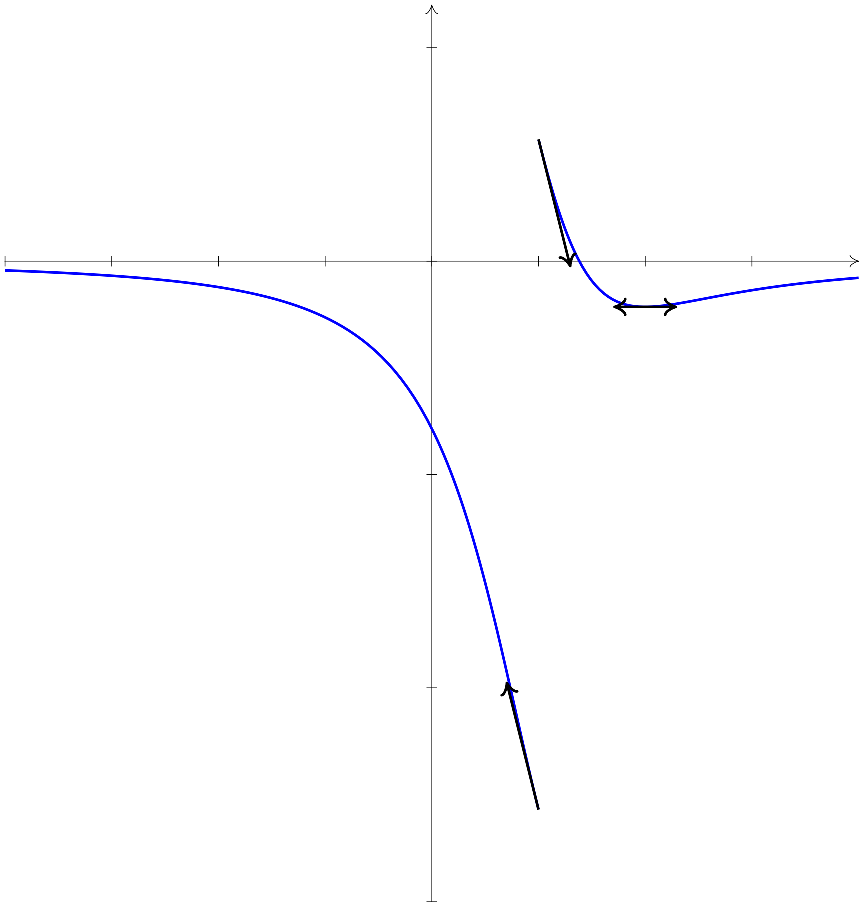
1. On commence gentiment : arctan étant définie sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
2. Rappelons que $\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ (cela découle par exemple de son développement limité vu en cours). Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$, on a donc $\arctan\left(\dfrac{1}{x-1}\right) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \dfrac{1}{x-1} \sim \dfrac{1}{x}$, dont on déduit que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$. Il y a donc une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$, d'équation $y = 1$, valable en $+\infty$ comme en $-\infty$. Du côté de 1, il faut séparer limite à gauche et à droite : $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$, donc $\underset{x\to 1^+}{f}(x) = \dfrac{\pi}{2}$ (j'espère que vous n'avez pas oublié les limites classiques de la fonction arctangente). De façon symétrique, on obtient $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$. Il n'y a donc **pas** d'asymptote verticale en 1, même si la fonction f n'y est pas définie ni prolongeable par continuité, puisque ces limites ne sont pas infinies.
3. Ce sont bien les variations de f' et pas de f qui sont demandées, il va donc falloir dériver deux fois la fonction (qui est sans problème dérivable deux fois sur $\mathcal{D}_f$). Calculons déjà $f'(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x-1}\right) - \dfrac{x}{(x-1)^2} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{(x-1)^2}} = \arctan\left(\dfrac{1}{x-1}\right) - \dfrac{x}{x^2-2x+2}$. On est repartis pour un tour : $f''(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2} \times \dfrac{(x-1)^2}{x^2-2x+2} - \dfrac{x^2-2x+2-x(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2} = -\dfrac{1}{x^2-2x+2} - \dfrac{-x^2+2}{(x^2-2x+2)^2} = \dfrac{x^2-2-(x^2-2x+2)}{(x^2-2x+2)^2} = \dfrac{2x-4}{(x^2-2x+2)^2}$. Bon, au moins, le signe de f'' est facile à étudier, puisque c'est le même que celui de $2x-4$. La fonction f' est donc décroissante sur $]-\infty, 1[$ et à nouveau sur $]1, 2]$, puis croissante sur $[2, +\infty[$, avec un minimum en 2 de valeur $f'(2) = \arctan(1) - \dfrac{2}{2} = \dfrac{\pi}{4} - 1$, valeur légèrement négative. Pour faire un tableau de variations complet, on va avoir besoin de calculer à nouveau quelques limites. Sans réelle difficulté, on obtient $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0$ (ce qui est dans l'arctangente tend vers 0, et la fraction rationnelle aussi puisqu'elle est de degré strictement négatif). Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{x^2-2x+2} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \dfrac{\pi}{2} - 1$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = -\dfrac{\pi}{2} - 1$. Il est temps de dresser le tableau de variations demandé :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f'	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}-1$ ‖ $\frac{\pi}{2}-1$	$\searrow$	$\frac{\pi}{4}-1$	$\nearrow$	0

4. C'est une conséquence assez immédiate de l'étude des variations. La fonction f' est bijective de $]-\infty, 1[$ vers $\left]-\dfrac{\pi}{2}-1, 0\right[$ et ne s'annule donc pas sur cet intervalle. Elle est aussi bijective

de $]1, 2]$ vers $\left[\frac{\pi}{4} - 1, \frac{\pi}{2} - 1\right]$, intervalle contenant la valeur 0 (puisque $\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{2}$), donc f' s'annule exactement une fois sur $]1, 2]$. Enfin, f est à nouveau bijective sur $[2, +\infty[$, mais vers un intervalle image ne contenant pas 0, donc elle ne s'y annule pas. On a donc prouvé un peu plus que ce qui était demandé : on sait que $\alpha \in]1, 2[$.

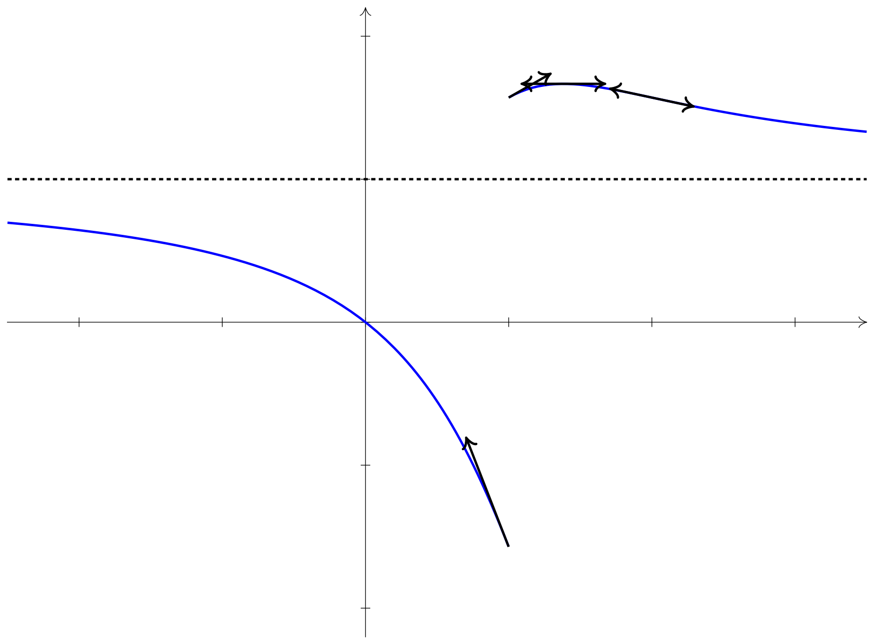
5. On a déjà calculé la limite à droite de f' en 1, qui est égale à $\frac{\pi}{2} - 1$, d'où le prolongement par continuité. De plus, $\lim\limits_{x \to 1^+} f''(x) = \frac{-2}{1^2} = -2$, donc, d'après le théorème de prolongement de la dérivée, f' est dérivable à droite en 1, avec $f''_d(1) = -2$.
6. C'est exactement la même chose que la question précédente, mais avec une limite à gauche de f' qui est égale à $-\frac{\pi}{2} - 1$, d'où l'absence de prolongement par continuité « global ». Par contre, la dérivée à gauche est la même qu'à droite : $f''_g(1) = -2$.
7. Poour étudier la convexité de la fonction f', il faut le signe de sa dérivée seconde. Ah oui, il va donc falloir dériver encore une fois : $f'''(x) = \frac{2(x^2 - 2x + 2)^2 - (2x - 4) \times 2(2x - 2)(x^2 - 2x + 2)}{(x^2 - 2x + 2)^4} = \frac{2(x^2 - 2x + 2) - 2(2x - 4)(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 2)^3} = \frac{2x^2 - 4x + 4 - 8x^2 + 24x - 16}{(x^2 - 2x + 2)^3} = \frac{2(-3x^2 + 10x - 6)}{(x^2 - 2x + 2)^3}$.
Comme $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 > 0$, cette dérivée est simplement du signe du trinome $-3x^2 + 10x - 6$, qui a pour discriminant $\Delta = 100 - 72 = 28$ et pour racines $x_1 = \frac{-10 - 2\sqrt{7}}{-6} = \frac{5 + \sqrt{7}}{3} \simeq 2.5$ et $x_2 = \frac{5 - \sqrt{7}}{3} \simeq 0.8$. Comme le coefficient dominant du trinome est négatif, f' est donc concave sur $]-\infty, x_2[$, puis convexe sur $]x_2, 1[$ et sur $]1, x_1[$, puis à nouveau concave sur $]x_1, +\infty[$. La position de x_2, trop proche de 1, fait qu'on ne verra objectivement rien à cet endroit de la courbe. Pour x_1, on sait de toute façon qu'il y a un changement de convexité à droite de 2 avec les autres informations disponibles. Bref, ce calcul ne servait pour ainsi dire à rien.
8. On indique bien sûr le minimum en 2, et les limites et tangentes calculées à gauche et à droite en 1. Pour les points d'inflexion, comme on vient de le dire, c'est moins essentiel.



9. Une question facile : f' est négative sur tout l'intervalle $]-\infty, -1[$, puis positive sur $]1, \alpha]$, et à nouveau négative sur $[\alpha, +\infty[$. On a déjà calculé toutes les limites de la fonction f, d'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
f	1	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$ ‖ $\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	1

10. C'est à nouveau une application du théorème de prolongement de la dérivée, aucun calcul à faire puisque tout a déjà été fait plus haut. Rappelons simplement que $f'_d(1) = \dfrac{\pi}{2} - 1$ et $f'_g(1) = -\dfrac{\pi}{2} - 1$.
11. L'étude de f'' effectuée plus haut a montré que son unique valeur d'annulation se situe en $x = 2$. Or, $f'(2) = \dfrac{\pi}{4} - 1$ (valeur déjà calculée) et $f(2) = 2\arctan(1) = \dfrac{\pi}{2}$. La tangente demandée a donc pour équation $y = \left(\dfrac{\pi}{4} - 1\right)(x-2) + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{4}x - x + 2 + \pi$.
12. Concernant le maximum en α, on manque de valeurs, je me permets donc de vous informer que $\alpha \simeq 1.4$ et $f(\alpha) \sim 1.7$. On place par contre le plus précisément possible le point d'inflextion en 2 (et sa tangente), ainsi bien sûr que les demi-tangentes à gauche et à droite en 1. On peut aussi noter qu'on a manifestement $f(0) = 0$, et on devrait obtenir un truc qui ressemble à ceci :



Exercice 2 (probas, variables aléatoires)

1. Après deux tirages, il n'y a que deux possibilités : soit on a tiré une boule blanche avec probabilité $\frac{1}{2}$, et on aura $X_1 = 1$ puisque c'est une boule noire qu'on ajoute dans l'urne dans ce cas. Soit on tire une boule noire, là aussi avec probabilité $\frac{1}{2}$, et on aura dans ce cas $X_1 = 2$ puisqu'on va ajouter une boule blanche dans l'urne. Autrement dit, $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{2}$. Le calcul de l'espérance est assez évident : $\mathbb{E}(X_1) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. On calcule de même $\mathbb{E}(X_1^2) = 1 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. Via la formule de König-Huygens, on obtient alors $\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{E}(X_1^2) - (\mathbb{E}(X_1))^2 = \frac{5}{2} - \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$. On pouvait aussi appliquer directement les formules du cours sur les espérances et variances de lois uniformes, puisqu'on constate que $X_1 \sim \mathcal{U}(\{1, 2, \})$.
2. Pour avoir $X_2 = 1$, il faut tirer deux fois de suite des boules noires afin de ne jamais ajouter de boule blanche dans l'urne. Le premier tirage de boule noire s'effectue avec probabilité $\frac{1}{2}$, et le deuxième avec probabilité $\frac{1}{3}$ puisqu'on a ajouté une deuxième boule blanche dans l'urne, ce qui donne bien $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ (on peut faire un bel arbre pour illustrer tout ça si on le souhaite). Le calcul de $\mathbb{P}(X_2 = 3)$ est identique, puisqu'il faut cette fois tirer deux boules noires de suite, avec les mêmes probabilités que pour les boules blanches. Enfin, on peut déduire la valeur de $\mathbb{P}(X_2 = 2)$ en utilisant le fait que la somme des trois probabilités doit être égale à 1, ou par un calcul direct : peu importe ce qu'on tire en premier, on aura $X_2 = 2$ si et seulement si le deuxième tirage donne une boule de couleur opposée au premier, ce qui se produit avec probabilité $\frac{2}{3}$ puisqu'on a ajouté une boule de cette couleur dans l'urne à l'issue du premier tirage.
3. Au minimum, il restera toujours une boule blanche dans l'urne si on ne fait que tirer des boules blanches (ce qui devient de plus en plus improbable, mais peu importe). Au maximum, on en aura $k + 1$ si on a tiré uniquement des boules noires puisqu'on a dans ce cas ajouté k boules blanches. Toutes les valeurs entières comprises entre ces extrêma étant possibles, on a

$X_k(\Omega) = \{1, 2, \dots, k+1\}$.

4. Le calcul n'a de sens que si $1 \leqslant i \leqslant k+1$, mais surtout si $j \in \{i, i+1\}$ (on ne peut pas faire diminuer le nombre de boules blanches dans l'urne, ni le faire augmenter de plus d'une unité suite à un tirage). Autrement dit, $\mathbb{P}_{X_k=i}(X_{k+1} = j) = 0$ si $j \notin \{i, i+1\}$. Si on suppose $X_k = i$, il y a donc dans l'urne i boules blanches et $k+2-i$ boules noires dans l'urne au moment d'effectuer le tirage numéro $k+1$ (on a ajouté une boule après chaque tirage déjà effectué, donc on a $k+2$ boules au total dans l'urne). L'évènement $X_{k+1} = i$ se produit si on tire une boule blanche, donc $\mathbb{P}_{X_k=i}(X_{k+1} = i) = \dfrac{i}{k+2}$. De même, on aura $X_{k+1} = i+1$ si on tire une boule noire, donc $\mathbb{P}_{X_k=i}(X_{k+1} = i+1) = \dfrac{k+2-i}{k+2}$.
5. Les évènements $X = j$ forment un système complet d'évènement lorsque j varie dans $X_k(\Omega)$. On peut donc appliquer la formule des probabilités totales pour calculer $\mathbb{P}(X_{k+1} = i) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k+1} \mathbb{P}_{X_k=j}(X_{k+1} = i) \times \mathbb{P}(X_k = j)$. Or, dans cette formule, toutes les probabilités conditionnelles sont nulles, sauf celle correspondant à $j = i$, qui vaut $\mathbb{P}_{X_k=i}(X_{k+1} = i) = \dfrac{i}{k+2}$, et celle correspondant à $j = i-1$, qui vaut $\mathbb{P}_{X_k=i-1}(X_{k+1} = i) = \dfrac{k+2-(i-1)}{k+2} = \dfrac{3+k-i}{k+1}$ (attention au décalage et à l'utilisation un peu piégeuse des indices par rapport à la question précédente). La formule de l'énoncé en découle immédiatement (on notera qu'elle reste valable même dans le cas très particulier où $i = 1$ puisque dans ce cas le deuxième terme de la somme est nul).
6. On sait déjà que $X_3(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$. On calcule les quatre probabilités à l'aide de la formule précédente, et de la loi de X_2 déterminée plus haut : $\mathbb{P}(X_3 = 1) = \dfrac{1}{4}\mathbb{P}(X_2 = 1) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{24}$; $\mathbb{P}(X_3 = 2) = \dfrac{2}{4}\mathbb{P}(X_2 = 2) + \dfrac{3}{4}\mathbb{P}(X_2 = 1) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{11}{24}$; $\mathbb{P}(X_3 = 2) = \dfrac{3}{4}\mathbb{P}(X_2 = 3) + \dfrac{2}{4}\mathbb{P}(X_2 = 2) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{11}{24}$ et $\mathbb{P}(X_3 = 4) = \dfrac{1}{4}\mathbb{P}(X_2 = 3) = \dfrac{1}{24}$ (un seul terme dans ce cas puisqu'on ne peut pas avoir $X_2 = 4$). Le fait que la loi de X_3 soit symétrique est normal dans la mesure où les boules blanches et noires jouent un rôle symétrique dans ce problème.
7. Pour avoir $X_k = 1$, il faut tirer en permanence des boules blanches, sachant qu'on a une boule blanche sur les $k+1$ contenues dans l'urne au tirage numéro k tant qu'on ne tire que des boules blanches. On a donc bien $\mathbb{P}(X_k = 1) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} \times \cdots \times \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{(k+1)!}$. Si on veut être hyper rigoureux, on peut faire une récurrence, ou appliquer correctement la formule des probabilités composées.
8. C'est exactement le même calcul que le précédent (il faut tirer en permanence des boules noires alors qu'il y en a une seule dans l'urne à chaque tirage), donc $\mathbb{P}(X_k = k+1) = \dfrac{1}{(k+1)!}$.
9. Calculons $u_{k+1} = (k+2)!\mathbb{P}(X_{k+1} = 2) = (k+2)! \times \dfrac{2}{k+2}\mathbb{P}(X_k = 1) + (k+2)! \times \dfrac{k+1}{k+2}\mathbb{P}(X_k = 1) = 2u_k + k + 1$ puisque $\mathbb{P}(X_k = 1) = \dfrac{1}{(k+1)!}$. On en déduit que $u_{k+1} + k + 3 = 2u_k + 2k + 4 = 2(u_k + k + 2)$, ce qui prouve donc que $(u_k + k + 2)$ est géométrique de raison 2. Comme $u_0 + 0 + 2 = 2$ (la probabilité $\mathbb{P}(X_0 = 2)$ étant évidemment nulle), on en déduit que $u_k + k + 2 = 2^{k+1}$, et donc que $u_k = 2^{k+1} - k - 2$ et enfin que $\mathbb{P}(X_k = 2) = \dfrac{2^{k+1} - k - 2}{(k+2)!}$.
10. Par définition, $\mathbb{E}(X_{k+1}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k+2} i\mathbb{P}(X_{k+1} = i) = \sum_{i=1}^{k+2} \frac{i^2}{k+2}\mathbb{P}(X_k = i) + \frac{i(3+k-i)}{k+2}\mathbb{P}(X_k =$

$i-1) = \sum_{i=1}^{k+2} \frac{i^2}{k+2}\mathbb{P}(X_k = i) + \sum_{i=0}^{k+1} \frac{(i+1)(2+k-i)}{k+2}\mathbb{P}(X_k = i)$. Le dernier terme de la première somme et le premier de la deuxième somme étant nuls (ils correspondent à des valeurs impossibles pour la variable X_k), on peut regrouper les deux sommes pour obtenir $\mathbb{E}(X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{i^2+(i+1)(2+k-i)}{k+2}\mathbb{P}(X_k = i) = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{i+ik+2+k}{k+2}\mathbb{P}(X_k = i) = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{i(k+1)}{k+2}\mathbb{P}(X_k = i) + \sum_{i=1}^{k+1} \mathbb{P}(X_k = i) = \frac{k+1}{k+2}\mathbb{E}(X_k) + 1$.

11. Puisqu'on nous donne gentiment la formule, faisons une simple récurrence. Pour $k = 0$, elle prétend que $\mathbb{E}(X_0) = 1$, ce qui est vrai. Si on la suppose vraie au rang k, alors avec la formule obtenue à la question précédente, $\mathbb{E}(X_{k+1}) = \frac{k+1}{k+2} \times \frac{k+2}{2} + 1 = \frac{k+1}{2} + 1 = \frac{k+3}{2}$, ce qui prouve bien l'hérédité et achève la récurrence.
12. Les boules blanches et noires jouant le même rôle, Y_k aura exactement la même loi et la même espérance que X_k. Or, on a évidemment toujours $X_k+Y_k = k+2$ (nombre total de boules dans l'urne), donc $\mathbb{E}(X_k+Y_k) = 2\mathbb{E}(X_k) = 2\mathbb{E}(Y_k) = k+2$, d'où bien sûr $\mathbb{E}(X_k) = \mathbb{E}(Y_k) = \frac{k+2}{2}$.

Exercice 3 (analyse, suites implicites)

1. (a) C'est évident à partir du moment où la fonction $g : t \mapsto t\ln(t)$ est décroissante sur $[2, +\infty[$. Vérifions que c'est bien le cas : g est dérivable et $g'(t) = -\frac{\ln(t)+1}{t^2\ln^2(t)}$. Cette dérivée est négative sur $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$, donc a fortiori sur $[2, +\infty[$. On en déduit que, $\forall t \ni [k, k+1[$, $\frac{1}{t\ln(t)} \leqslant \frac{1}{k\ln(k)}$, et il ne reste plus qu'à intégrer pour obtenir l'inégalité souhaitée.
   (b) En sommant les inégalités précédentes pour toutes les valeurs de k comprises entre 2 et n, on a, via la relation de Chasles, $\int_2^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)}\,dt \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k} = \sum_{k=2}^{n} a_k$. Or, l'intégrale de gauche se calule aisément, elle est égale à $[\ln(\ln(t))]_2^{n+1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2))$, qui tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. La divergence de la série $\sum a_n$ en découle. Notons en passant qu'on nous a fait redémontrer un cas particulier de comparaison série-intégrale plutôt que d'appliquer directement le théorème.
2. (a) La fonction est définie si $1-x > 0$, ce qui assure à la fois l'existence du ln au dénominateur et la non annulation du facteur $1-x$, et si $\ln(1-x) \neq 0$, donc si $x \neq 0$. Finalement, $\mathcal{D}_f =]-\infty, 0[\cup]0, 1[$. En utilisant l'équivalent classique $\ln(1-x) \sim -x$ quand x tend vers 0, on a $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x}{1\times(-x)} \sim 1$, donc $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, ce qui prouve l'existence du prolongement par continuité demandé.
   (b) Le taux d'accroissement de f en 0 est défini par $\tau_0(h) = \frac{f(h)-1}{h} = \frac{-1}{(1-h)\ln(1-h)} - \frac{1}{h} = \frac{-h-(1-h)\ln(1-h)}{h(1-h)\ln(1-h)}$. Le dénominateur de cette fraction est équivalent à $-h^2$ quand h tend vers 0. Effectuons un développement limité à l'ordre 2 de son numérateur : $-h-(1-h)\ln(1-h) = -h-(1-h)\left(-h-\frac{1}{2}h^2\right)+o(h^2) = -h+h+\frac{1}{2}h^2-h^2+o(h^2) \sim -\frac{1}{2}h^2$, donc $\tau_0(h) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{-\frac{1}{2}h^2}{-h^2} \sim \frac{1}{2}$, ce qui prouve que notre d'accroissement a une limite finie en 0, et donc que f y est dérivable et que $f'(0) = \frac{1}{2}$.

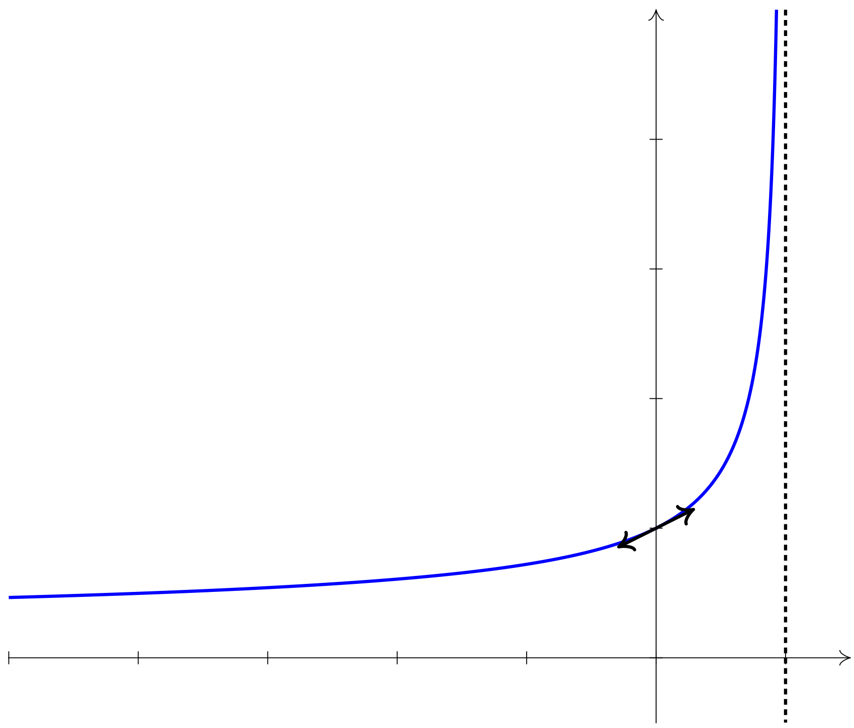
3. (a) Un calcul passionnant : $f'(x) = \dfrac{-(1-x)\ln(1-x) + x(-\ln(1-x) - 1)}{(1-x)^2 \ln^2(1-x)} = \dfrac{-x - \ln(1-x)}{(1-x)^2 \ln^2(1-x)}$.

(b) Il n'y a rien à étudier du tout si on connait ses inégalités de convexité classiques : $\ln(1+x) \leqslant x$ pour $x > -1$. Si on applique cette inégalité à $-x$, on en déduit que $\ln(1-x) \leqslant -x$, donc $\ln(1+x) + x \leqslant 0$ (l'inégalité est même stricte si $x \neq 1$). La fonction f est donc croissante (le numérateur de f' est de signe positif) sur tout son intervalle de définition $]-\infty, 1[$.

(c) Puisqu'on a déjà traité le cas de 0, il ne reste que deux limites à calculer. Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x}{1-x} = 1$, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{\ln(1-x)} = 0$. Et à l'aide dd'un changement de variable trivial, $\lim\limits_{x \to 1^-} (1-x)\ln(1-x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0^-$ (croissance comparée classique), donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$. Ce qui nous donne le passionnant tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		1
f	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

(d) On s'empresse d'indiquer la tangente calculée en 0 pour rendre la courbe un tout petit peu plus précise :



4. (a) L'étude de la fonction f prouve qu'elle est continue et croissante, donc bijective de $]-\infty, 1[$ vers $]0, +\infty[$. Tout réel strictement positif admet donc un unique antécédent par f, et en particulier tout entier $n \geqslant 1$. Comme $f(0) = 1$, l'antécédent de 1 est 0, donc $u_1 = 0$.

(b) En notant f^{-1} la réciproque de f, la fonction f^{-1} est strictement croissante et bijective de $]0, +\infty[$ vers $]-1, +\infty[$ (théorème de la bijection). En particulier, $\lim\limits_{n \to +\infty} f^{-1}(n) = +\infty$, donc $\lim u_n = 1$, puisque par définition $u_n = f^{-1}(n)$.

(c) Si $x = 1 - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$, $1 - x = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$, donc $f\left(1 - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right) = \left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}} - 1\right) \times \dfrac{n\sqrt{n}}{-\ln(n\sqrt{n}}) = \dfrac{2(n^{\frac{3}{2}} - 1)}{3\ln(n)}$. En particulier $f\left(1 - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right) \sim \dfrac{2n^{\frac{3}{2}}}{3\ln(n)}$, donc $\dfrac{f(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}})}{n} \sim \dfrac{2\sqrt{n}}{3\ln(n)}$, qui a une limite infinit par croissance comparée. Cette valeur sera donc plus grande que 1 à partir d'un certain rang, ce qui revient à dire que $f\left(1 - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right) \geqslant n$ à partir de ce même rang. En appliquant à cette inégalité la fonction croissante f^{-1}, on obtient $u_n \leqslant 1 - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ à partir d'un certain rang.

(d) D'après la question précédente, à partir d'un certain rang, $1 - u_n \geqslant \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$, donc $\ln(1 - u_n) \geqslant -\ln(n^{\frac{3}{2}}) = -\dfrac{3}{2}\ln(n)$. On en déduit que $-n\ln(1 - u_n) \leqslant \dfrac{3}{2}n\ln(n)$, puis que $-\dfrac{1}{n\ln(1 - u_n)} \geqslant \dfrac{2}{3n\ln(n)}$. Comme on a prouvé en début d'exercice que ce dernier minorant était le terme général d'une série divergente, la divergence de $\sum \dfrac{-1}{n\ln(1 - u_n)}$ en découle (même si ça ne saute pas aux yeux ici, les séries manipulées sont bien à termes positifs).

(e) Par définition de la suite (u_n), $\dfrac{-u_n}{(1 - u_n)\ln(1 - u_n)} = n$, donc $1 - u_n = \dfrac{-u_n}{n\ln(1 - u_n)} \sim -\dfrac{1}{n\ln(1 - u_n)}$ puisque la suite (u_n) converge vers 1. La série $\sum(1 - u_n)$ est donc elle aussi divergente, par critère d'équivalence.

Exercice 4 (algèbre linéaire)

Partie I

1. Trivialement, $F = \text{Vect}\left(I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$. Les deux matrices étant non proportionnelles, elles forment une base de F, qui est donc un sous-espace de dimension 2 de E.
2. Non, l'ensemble G n'est pas du tout stable par somme ni par produit extérieur, par exemple $I_3 \in G$, mais $2I_3 \notin G$ puisque $(2I_3)^2 = 4I_3 \neq 2I_3$.
3. (a) A est bien de la forme définissant l'ensemble F, avec $a = \dfrac{2}{3}$ et $b = -\dfrac{1}{3}$. De plus, $A^2 = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$, donc $A \in G$.

(b) Il suffit de poser $P = X^2 - X$.

(c) Si λ est valeur propre de A, il existe des vecteurs propres non nuls associés, donc des matrices-colonnes X vérifiant $AX = \lambda X$. Mais alors $A^2X = \lambda AX = \lambda^2 X$, donc $(A^2 - A)X = (\lambda^2 - \lambda)X$. Or, $A^2 - A = 0$, donc $(A^2 - A)X = 0$, ce qui impose $\lambda^2 - \lambda = 0$ quand X est supposé non nul. Les valeurs propres de A sont donc 0 et 1, les deux racines du polynôme P (techniquement, on n'est pas encore sûr que ces deux valeurs sont vraiment valeurs propres, ce qu'on va vérifier à la question suivante, on sait juste que les valeurs propres **potentielles** de A sont 0 et 1).

(d) Pour présenter les choses de façon habituelle, on va noter f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A, et défini par $f(x, y, z) = \dfrac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z)$. Les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 sont simplement les éléments du noyau, donc les vecteurs $u(x, y, z)$ vérifiant le système suivant, en se débarassant du

facteur $\frac{1}{3}$: $\begin{cases} 2x & - & y & - & z & = & 0 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ -x & -y & + & 2z & = & 0 \end{cases}$. Autrement dit, chacune des trois valeurs x, y et z doit être la moyenne des deux autres, ce qui implique que chacune des trois est située entre les deux autres (pour une fois qu'on peut utiliser des méthodes très inhabituelles pour résoudre un système, profitons-en, mais un bête pivot aurait aussi très bien fait l'affaire). La seule possibilité est donc d'avoir $x = y = z$, et réciproquement cette condition est suffisante, donc $\ker(f) = \text{Vect}((1, 1, 1))$. On cherche ensuite les vecteurs propres associés à la valeur propre 1, donc les vecteurs $u(x, y, z)$ vérifiant $f(u) = u$. On fait attention en multipliant par 3 pour obtenir le système suivant : $\begin{cases} 2x & - & y & - & z & = & 3x \\ -x & + & 2y & - & z & = & 3y \\ -x & -y & + & 2z & = & 3z \end{cases}$.
Les trois équations étant identiques, on conserve l'unique condition $z = -x - y$, donc $\ker(f - id) = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1))$. Puisqu'on a obtenu trois vecteurs propres qui forment clairement une base de $\mathbb{R}^3$ (on vérifie facilement que $(1, 1, 1)$ n'est pas combinaison linéaire de $(1, 0, -1)$ et de $(0, 1, -1)$), la matrice A est diagonalisable. En fait, ce n'est absolument pas une surprise, puisqu'il s'agit d'une matrice de projection (par définition, $A^2 = A$), et que toutes les matrices de projection sont diagonalisables dans une base adaptée constituée de vecteurs du noyau et de l'image de leur endomorphisme canoniquement associé, qui sont toujours supplémentaires. Par contre, son noyau n'étant pas réduit à 0, f n'est pas injective, donc pas bijective, et A n'est pas inversible.

Partie II

1. Calculons donc $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ a & a & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2+2b^2 & 2ab+b^2 & 2ab+b^2 \\ 2ab+b^2 & a^2+2b^2 & 2ab+b^2 \\ 2ab+b^2 & 2ab+b^2 & a^2+2b^2 \end{pmatrix}$. Cette matrice est égale à M si les deux équations suivantes sont vérifiées : $a^2 + 2b^2 = a$, et $2ab + b^2 = b$, donc $b(2a + b - 1) + 0$, ce sont bien les conditions données par l'énoncé.
2. La deuxième équation obtenue est vérifiée si $b = 0$ ou $b + 2a - 1 = 0$. Dans le cas où $b = 0$, la première équation devient $a^2 + a$, qui est vérifiée lorsque $a = 0$ (on a alors $M = 0$) ou $a = 1$ (dans ce cas, $A = I_3$). Dans le cas où $b = 1 - 2a$, la première équation devient $a^2 + 2(1 - 2a)^2 = a$, soit $9a^2 - 9a + 2 = 0$. Le discriminant de ce trinome vaut $\Delta = 81 - 72 = 9$, et il admet donc deux racines réelles $a_1 = \frac{9-3}{18} = \frac{1}{3}$ et $a_2 = \frac{9+3}{18} = \frac{2}{3}$. Dans le cas où $a = \frac{1}{3}$, $b = 1 - 2a = \frac{1}{3}$, et la matrice M ne contient que des coefficients égaux à $\frac{1}{3}$, ce qui correspond exactement à $I_3 - A$. Dans le cas où $a = \frac{2}{3}$, $b = 1 - 2a = -\frac{1}{3}$ et $M = A$, ce qui donne bien les quatre matrices attendues pour $F \cap G$.
3. Les deux matrices appartiennent à F et sont non proportionnelles. Comme F est de dimension 2, elles en forment en effet une base.
4. (a) Comme A, B et M sont des matrices appartenant à F, il suffit de vérifier l'égalité sur les deux premiers coefficients de la matrice. Pour le premier, $\frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta = \frac{2}{3}a - \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b = a$, c'est bon. Et pour le deuxième, $-\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta = -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b = b$, donc ça marche aussi. L'égalité est donc vrai pour tous les coefficients, et $\alpha A + \beta B = M$.
   (b) Même pas besoin d'écrire les coefficients des matrices : $AB = A(I_3 - A) = A - A^2 = 0$. De même, $BA = 0$.
   (c) On peut faire un binôme de Newton de gros bourrin en appliquant le résultat précédent (les matrices commutent), ou bien faire une récurrence plus élégante. Pour $n = 0$, $A + B = I_3$ puisque $B = I_3 - A$, donc l'identité $M^0 = A + B$ est vérifiée. Supposons que $M^n = \alpha^n A +$

$\beta^n B$, alors $M^{n+1} = (\alpha A + \beta B)(\alpha^n A + \beta^n B) = \alpha^{n+1}A^2 + \alpha\beta^n AB + \alpha^n\beta BA + \beta^{n+1}B^2 = \alpha^{n+1}A + \beta^{n+1}B$ puisque $AB = BA = 0$, $A^2 = A$ et $B^2 = B$.

5. On a déjà prouve que A n'était pas inversible, donc ses multiples ne le sont pas non plus. De même, B n'est pas inversible (toutes ses lignes sont identiques !), donc ses multiples non plus, ce qui prouve que M n'est pas inversible quand $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$. Supposons donc les deux coefficients non nuls, alors, en jetant un oeil à la question suivante, on calcule $\left(\frac{1}{\alpha}A + \frac{1}{\beta}B\right)(\alpha A + \beta B) = A^2 + B^2 = I_3$, donc $M = \alpha A + \beta B$ est inversible, et $M^{-1} = \frac{1}{\alpha}A + \frac{1}{\beta}B$.
6. Le calcul de la question précédente montre que la formule reste vraie pour $n = -1$. En fait, on peut le généraliser aisément : $\left(\frac{1}{\alpha^n}A + \frac{1}{\beta^n}B\right)(\alpha^n A + \beta^n B) = A^2 + B^2 = I_3$, ce qui prouve directement que $M^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}A + \frac{1}{\beta^n}B$.

Partie III

1. On calcule brillamment $I_3 - T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, qui est une matrice appartenant à F, avec $a = -2$ et $b = -1$. Les calculs de la deuxième partie montrent alors que $I_3 - T = \alpha A + \beta B$, avec $\alpha = a - b = -1$ et $\beta = -2 - 2 = -4$.
2. Là encore, aucun calcul, tout a été fait plus haut : $(I_3 - T)^{-1} = -A - \frac{1}{4}B$. Personne n'ayant demandé d'expression explicite de la matrice, on s'en tiendra là.
3. On cherche donc une solution de l'équation $(I_3 - T)L = Y$, qui est unique et vaut $(I_3 - T)^{-1}Y$ puisque la matrice est inversible. Ah mince, il faut l'exprimer, donc calculer $(I_3 - T)^{-1} = -A - \frac{1}{4}B = -\frac{3}{4}A - \frac{1}{4}I_3 = \frac{1}{4}(-3A - I_3) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à multiplier par Y pour obtenir $L = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = -Y$.
4. En remplaçant Y par $L - TL$ dans la relation de récurrence définissant X_n, on a $X_{n+1} = TX_n + L - TL$, donc $X_{n+1} - L = T(X_n - L)$. La deuxième relartion découle alors d'une récurrence triviale. Elle est vraie de façon évidente au rang 0, et si $X_n - L = T^n(X_0 - L)$, alors $X_{n+1} - L = T(X_n - L) = T \times T^n(X_0 - L) = T^{n+1}(X_0 - L)$.
5. On sait que $T \in F$, avec $a = 3$ et $b = 1$, ce qui correspond à $\alpha = 2$ et $\beta = 5$, donc $T^n = 2^n A + 5^n B$. Il ne reste plus qu'à conclure à l'aide de la question précédente : $X_n = (2^n A + 5^n B)(X_0 - L) + L$.