Entraînement pour le DS bilan

MPSI Lycée Camille Jullian

26 mai 2026

Cette feuille d'exercices un peu particulière est constituée de quatre problèmes de difficulté et de longueur variables balayant une partie du programme de première année (ils sont pour la plupart issus de sujets de concours récents posés à des concours d'entrée d'écoles de commerce), pour vous servir d'entraînement avant le DS bilan du 6 juin. Elle n'est bien sûr pas censée être représentative de ce que vous aurez comme sujet ce jour-là (ni même indicative des thèmes précis qui seront abordés). Il est par ailleurs évident qu'il est illusoire d'espérer traiter l'intégralité de ces quatre exercices lors d'un TD de deux heures... et même probablement lors d'une séance de travail acharné de quatre heures.

Exercice 1 (analyse, fonction trigonométriques réciproques)

On note dans tout cet exercice f la fonction définie par $f(x) = x \arctan\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$. On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de cette fonction.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer les limites de f au bord de son domaine de définition, et préciser les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}_f$.
3. Étudier les variations de la fonction dérivée f', et dresser un tableau de variations complet pour cette fonction (oui, c'est une question légèrement calculatoire).
4. Montrer qu'il existe un unique réel α (qu'on ne cherchera pas à déterminer) vérifiant $f'(\alpha) = 0$.
5. Montrer que f' est prolongeable par continuité **à droite** en 1, et que ce prolongement est dérivable.
6. Montrer de même que f' est prolongeable **à gauche** en 1 en une fonction dérivable (mais les deux prolongements obtenus sont « incompatibles » puisque les limites à gauche et à droite ne sont pas égales).
7. Étudier la convexite de la fonction f' (on se contentera d'une valeur approchées grossière des abscisses des points d'inflexion).
8. Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction f'.
9. Déterminer le signe de f' (en fonction de α), puis dresser le tableau de variations de f.
10. Montrer comme précédemment que f est prolongeable, à gauche comme à droite, mais de manière incompatible, en une fonction dérivable en 1.
11. Préciser les coordonnées de l'unique point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$, ainsi que l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en ce point.
12. Tracer une allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ faisant apparaitre tous les calculs effectués dans cet exercice.

Exercice 2 (probas, variables aléatoires)

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une succession de tirages d'une boule dans cette urne. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne, ainsi qu'une boule supplémentaire de couleur opposée à celle tirée. On note, pour tout entier naturel k, X_k le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après le k-ème tirage. En particulier, $X_0 = 1$.

1. Déterminer la loi de la variable X_1. Calculer son espérance et sa variance.
2. Justifier soigneusement que la loi de X_2 est donnée par $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \dfrac{1}{6}$, $\mathbb{P}(X_2 = 2) = \dfrac{2}{3}$ et $\mathbb{P}(X_2 = 3) = \dfrac{1}{6}$.

3. Préciser l'univers-image $X_k(\Omega)$ de la variable X_k.
4. Calculer la probabilité $\mathbb{P}_{X_k=i}(X_{k+1}=j)$ pour $i \geqslant 1$ et $j \in X_k(\Omega)$ (on distinguera des cas selon la valeur de j).
5. Déduire de ce qui précède que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$,
$\mathbb{P}(X_{k+1}=i) = \dfrac{i}{k+2}\mathbb{P}(X_k=i) + \dfrac{3+k-i}{k+2}\mathbb{P}(X_k=i-1)$. $(\star)$
6. À l'aide de la formule $(\star)$, déterminer la loi de X_3.
7. Montrer que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_k=1) = \dfrac{1}{(k+1)!}$.
8. Calculer la valeur de $\mathbb{P}(X_k=k+1)$.
9. On pose $u_k = (k+1)!\mathbb{P}(X_k=2)$. Exprimer u_{k+1} en fonction de u_k et de k, puis montrer que la suite (u_k+k+2) est une suite géométrique. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X_k=2)$.
10. À l'aide de la formule $(\star)$, montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_{k+1}) = \dfrac{k+1}{k+2}\mathbb{E}(X_k)+1$.
11. En déduire que $\mathbb{E}(X_k) = \dfrac{k+2}{2}$.
12. En notant Y_k le nombre de boules noires présentes dans l'urne après k tirages, retrouver par un raisonnement élémentaire l'espérance de Y_k et celle de X_k.

Exercice 3 (analyse, suites implicites)

1. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $a_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$.
   (a) Montrer que, si $k \geqslant 2$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln(t)}\,dt \leqslant \frac{1}{k\ln(k)}$.
   (b) En déduire la nature de la série $\sum a_n$.
2. Pour toute la suite de l'exercice, on pose $f(x) = \dfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}$.
   (a) Préciser le domaine de définition de f, puis montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
   (b) Montrer que ce prolongement, qu'on notera toujours f, est même dérivable en 0, et préciser la valeur de $f'(0)$.
3. (a) Calculer la dérivée f' de la fonction f.
   (b) Étudier le signe de $\ln(1-x)+x$, et en déduire les variations de la fonction f.
   (c) Déterminer les limites de f et dresser son tableau de variations complet.
   (d) Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction f.
4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'existence d'un unique réel $u_n \in [0,1[$ tel que $f(u_n)=n$. Préciser la valeur de u_1.
   (b) Montrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.
   (c) Pour $n \geqslant 1$, calculer $f\left(1-\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$, puis montrer que $u_n \leqslant 1-\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ à partir d'un certain rang.
   (d) En déduire que la série $\sum \dfrac{-1}{n\ln(1-u_n)}$ est divergente (on pourra exploiter le résultat de la toute première question de l'exercice).
   (e) Déterminer la nature de la série $\sum(1-u_n)$.

Exercice 4 (algèbre linéaire)

On se place dans tout l'exercice dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note F l'ensemble des matrices appartenant à E qui sont de la forme $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On note par ailleurs $G = \{M \in E \mid M^2 = M\}$.

Partie I

1. L'ensemble F est-il un sous-espace vectoriel de E ? Si oui, donnez une base de F et préciser sa dimension.
2. L'ensemble G est-il un sous-espace vectoriel de E ? Si oui, donnez une base de G et préciser sa dimension.
3. On pose $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Démontrer que $A \in F \cap G$.
   (b) En déduire un polynôme P de degré 2 tel que $P(A) = 0$.
   (c) Montrer que les valeurs propres de la matrice A sont nécessairement racines du polynôme P, en déduire ces valeurs propres.
   (d) Calculer les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres obtenues à la question précédente. La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

Partie II

On considère dans cette partie une matrice $M \in F$, a et b désignant les valeurs de ses deux premiers coefficients.

1. Montrer que $M \in G \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b(b + 2a - 1) = 0 \end{cases}$.
2. En déduire que $F \cap G = \{0, I_3, A, I_3 - A\}$.
3. On note $B = I_3 - A$. Montrer que la famille (A, B) est une base de F.
4. On pose $\alpha = a - b$ et $\beta = a + 2b$ (pour l'anecdote, les valeurs données pour α et β dans le sujet de concours dont est tiré cet exercice étaient complètement fausses...).
   (a) Vérifier que $M = \alpha A + \beta B$.
   (b) Calculer AB et BA.
   (c) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $M^n = \alpha^n A + \beta^n B$.
5. Montrer que M est inversible si et seulement si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.
6. Montrer que, si M est inversible, la formule obtenue en question 4.c reste valable pour des entiers négatifs.

Partie III

On pose pour cette dernière partie $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On définit enfin une suite de matrices-colonnes (X_n) par la relation de récurrence $X_{n+1} = TX_n + Y$, valable pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $I_3 - T$, et exprimer cette matrice en fonction de A et B.
2. Calculer $(I_3 - T)^{-1}$.
3. Montrer qu'il existe une unique matrice-colonne L, à déterminer, telle que $L = TL + Y$.
4. Montrer que, pour tout entier n, on a $X_{n+1} - L = T(X_n - L)$, puis que $X_n - L = T^n(X_0 - L)$.
5. Exprimer enfin X_n en fonction de A, B, L, X_0 et n.