Programme de colle n$^{\text{o}}$ 9

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 24/11 au 28/11 2025

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtiments corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 6 : Techniques de calcul algébrique.

- démonstration par récurrence et variations (récurrence double, récurrence forte).
- sommes finies :
  - — notation $\sum$, règles de calcul (linéarité, relation de Chasles, changement d'indice)
  - — **calcul des sommes classiques** $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^3$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} q^i$
  - — exemples de calculs de sommes télescopiques (comme pour les intégrales dans le chapître précédent, on s'appuiera si besoin sur une version simplifiée du théorème de décomposition en éléments simples, avec des racines réelles simples au dénominateur).
  - — exemples de calculs de sommes doubles, du type $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}$ ou $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij}$ (l'écriture sous forme de deux calculs de sommes imbriqués doit être absolument maîtrisé, sans erreur sur la gestion des indices, dans un sens comme dans l'autre).
- produits finis : notation, règles de calcul, factorielle d'un nombre entier naurel.
- coefficients binômiaux $\displaystyle\binom{n}{k}$:
  - — définition comme quotients de factorielles (on a évoqué la vision combinatoire du nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments, mais aucune interprétation combinatoire n'est exigible)
  - — formules classiques : **symétrie des coefficients binômiaux**, **formule** $k\displaystyle\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, **relation de Pascal** (démonstration a priori purement calculatoire, mais il est autorisé de tenter une démonstration par raisonnement combinatoire).
  - — triangle de Pascal
  - — **formule du binôme de Newton** (démonstration effectuée par récurrence)
  - — formule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$, factorisation de $a^{n+1} - b^{n+1}$ sous la forme $(a-b)\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-1-i}$

Chapitre 7 : Nombres complexes.

- Structure de l'ensemble $\mathbb{C}$:
  — forme algébrique, parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe
  — identification de $\mathbb{C}$ avec le plan $\mathbb{R}^2$, image d'un nombre complexe dans le plan, affixe complexe d'un point du plan
  — somme, produit de deux nombres complexes, conjugué, module d'un nombre complexe et **propriétés élémentaires** (compatibilité du produit et du quotient avec la conjugaison et le calcul de module notamment), interprétation géométrique de la conjugaison et du module
  — inégalité triangulaire $||z| - |z|'| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ (la **démonstration** de l'inégalité de droite peut être demandée)
  — équations de cercles (on doit être capable de reconnaitre un cercle à partir de n'importe quelle forme de son équation)
  — écriture exponentielle des nombres complexes de module 1, argument d'un nombre complexe, propriétés de l'argument
- Applications du calcul complexe en trigonométrie :
  — formules d'Euler, formule de Moivre
  — calcul de $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en fonction des puissances de $\cos(x)$ et $\sin(x)$
  — linéarisation de $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$
  — factorisation par l'angle moitié pour obtenir la forme exponentielle d'expressions du type $1+e^{i\theta}$ et $1-e^{i\theta}$, ou $e^{ip}+e^{iq}$, application aux formules trigonométriques de transformation somme-produit et au calcul de sommes du type $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$
- PAS de racines n-èmes de l'unité ni de résolution d'équations du second degré à coefficients complexes cette semaine.

Prévisions pour la semaine suivante : nombres complexes (tout le chapitre).