Programme de colle n$^{\text{o}}$ 8

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 17/11 au 21/11 2025

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtiments corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 6 : Techniques de calcul algébrique.

- démonstration par récurrence et variations (récurrence double, récurrence forte).
- sommes finies :
  - — notation $\sum$, règles de calcul (linéarité, relation de Chasles, changement d'indice)
  - — **calcul des sommes classiques** $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^3$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} q^i$
  - — exemples de calculs de sommes télescopiques (comme pour les intégrales dans le chapître précédent, on s'appuiera si besoin sur une version simplifiée du théorème de décomposition en éléments simples, avec des racines réelles simples au dénominateur).
  - — exemples de calculs de sommes doubles, du type $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}$ ou $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{ij}$ (l'écriture sous forme de deux calculs de sommes imbriqués doit être absolument maîtrisé, sans erreur sur la gestion des indices, dans un sens comme dans l'autre).
- produits finis : notation, règles de calcul, factorielle d'un nombre entier naurel.
- coefficients binômiaux $\displaystyle\binom{n}{k}$:
  - — définition comme quotients de factorielles (on a évoqué la vision combinatoire du nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments, mais aucune interprétation combinatoire n'est exigible)
  - — formules classiques : **symétrie des coefficients binômiaux**, **formule** $k\displaystyle\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, **relation de Pascal** (démonstration a priori purement calculatoire, mais il est autorisé de tenter une démonstration par raisonnement combinatoire).
  - — triangle de Pascal
  - — **formule du binôme de Newton** (démonstration effectuée par récurrence)
  - — formule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, factorisation de $a^{n+1} - b^{n+1}$ sous la forme $(a-b)\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-1-i}$

Prévisions pour la semaine suivante : nombres complexes.