

Programme de colle n° 29

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 01/06 au 05/06 2026

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtimements corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 24 : Groupe symétrique, déterminants.

- Groupe symétrique \mathfrak{S}_n : vocabulaire (transpositions, cycles, support et longueur d'un cycle), décomposition en produit de cycles à supports disjoints (on n'a fait qu'une ébauche de preuve, qui n'est pas au programme, mais les élèves doivent être capables de déterminer rapidement la décomposition d'une permutation donnée), et en produit de transpositions.
- Nombre d'inversions d'une transposition, signature, la signature est un morphisme de \mathfrak{S}_n vers $\{-1, 1\}$, groupe alterné \mathcal{A}_n (aucune connaissance autre que la définition).
- Déterminants :
 - rappels sur le déterminant de deux vecteurs du plan et de trois vecteurs de l'espace : définition géométrique (dans le plan), caractérisation de la colinéarité/coplanarité, interprétation comme aire/volume d'un parallélogramme/parallélépipède, formule dans une base orthonormale, propriétés théoriques (multilinéarité, antisymétrie, alternance)
 - applications multi-linéaires, formes n -linéaires sur \mathbb{R}^n , formes symétriques, antisymétriques, alternées, **équivalence entre antisymétrie et alternance, l'ensemble des formes n -linéaires alternées sur un ev de dimension n est un ev de dimension 1** (on doit être capable d'expliquer le calcul menant à la formule explicite du déterminant dans une base donnée en fonction des coordonnées des vecteurs dans cette base)
 - déterminant d'une famille de vecteurs dans une base, noté $\det_{\mathcal{B}}$, caractérisation des bases comme familles de déterminant non nul
 - déterminant d'une matrice carrée : définition, caractérisation de l'inversibilité, propriétés élémentaires $\det(M^T) = \det(M)$, $\det(MN) = \det(M)\det(N)$, techniques de calcul (effet des opérations élémentaires sur les lignes/colonnes, développement du déterminant par rapport à une ligne/colonne), mineurs, cofacteurs et comatrice, formule d'inversion $M(\text{Com}(M))^T = \det(M)I_n$, exemples de calcul de déterminants par récurrence (on a en particulier traité le cas du **déterminant de Vandermonde** en cours, qui peut être posé en question de cours).

Chapitre 25 : Variables aléatoires.

- Vocabulaire général : variable aléatoire réelle, univers-image $X(\Omega)$ des valeurs prises par la variable X , loi d'une variable aléatoire (qui sera par défaut présentée sous forme de tableau puisqu'on travaillera toujours sur un univers fini), opérations élémentaires sur les variables aléatoires (somme, max, min, composition par une fonction réelle), variable aléatoire indicatrice d'un événement.
- Moments d'une variable aléatoire :
 - espérance $\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k\mathbb{P}(X = k)$, linéarité de l'espérance, positivité de l'espérance, variable aléatoire centrée, théorème du transfert.
 - variance $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$, positivité de la variance, formule $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$, **formule de König-Huygens** $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$ (qui devra être utilisée de façon automatique pour les calculs de variance), variable aléatoire réduite, définition de l'écart-type $\sigma(X)$.
 - inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev (aucun exercice n'a été traité sur le sujet)
- Lois usuelles :
 - loi uniforme à valeurs dans $\{1, 2, \dots, n\}$, **espérance et variance**
 - loi de Bernoulli de paramètre p
 - schéma de Bernoulli, loi binômiale de paramètre (n, p) , **espérance et variance** (calculées brutalement à coup de binôme de Newton)

Prévisions pour la dernière semaine : oral blanc portant sur tout le programme de l'année.