Programme de colle n^{o} 27

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 18/05 au 22/05 2026

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtiments corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 22 : Probabilités.

Rappel : seules les probabilités sur un univers **fini** sont au programme en première année.

- Vocabulaire général : expérience aléatoire, univers Ω des résultats possibles, évènements (évènement certain ou impossible, évènements incompatibles, système complet d'évènements), loi de probabilité sur un univers Ω (application vérifiant $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ quand les évènements A et B sont incompatibles), espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.
- Propriétés élémentaires : $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ (la formule de Poincaré générale n'est pas à savoir formuler, mais doit pouvoir être retrouvée très rapidement pour une union de trois ou quatre évènements), $\sum \mathbb{P}(A_i) = 1$ si les A_i forment un système complet d'évènements.
- Notion d'équiprobabilité et formule $\mathbb{P}(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$ dans le cas d'équiprobabilité.
- Probabilités conditionnelles :
  - — définition et notation (la notation $\mathbb{P}_A(B)$ a systématiquement été employée dans le cours)
  - — théorèmes faisant intervenir les probabilités conditionnelles : formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes
  - — quelques exemples faisant intervenir des chaînes de Markov ont été étudiés mais aucune connaissance théorique sur le sujet n'est exigible (ce qui n'interdit bien évidemment pas de poser des exercices de ce type)
  - — PAS de variables aléatoires pour l'instant, elles feront l'objet d'un chapitre séparé

Chapitre 23 : Fractions rationnelles.

- Corps des fractions rationnelles $\mathbb{K}(X)$: définition, opérations élémentaires sur les fractions rationnelles, représentant irréductible d'une fraction, degré, dérivée d'une fraction, pôles et racines.

- Décomposition en éléments simples : partie entière, théorème de décomposition en éléments simples (sans aucune démonstration, l'énoncé du théorème général n'est d'ailleurs pas vraiment exigible, il faut juste savoir écrire les différents termes de la décomposition théorique avant de se lancer dans les calculs), calcul effectif des décompositions (on peut utiliser les techniques suivantes : pour un pôle simple, produit par $X-a$ puis évaluation pour $X=a$, ou calcul de $\dfrac{P(a)}{Q'(a)}$; pour un pôle double, calcul de $G(a)$ et $G'(a)$ après avoir posé $G=(X-a)^2F$; utilisation de l'évaluation en une valeur non polaire ou d'un calcul de limite après avoir multiplié par X ; changement de variable pour se ramener à un pôle nul dans le cas d'un pôle multiple, éventuellement après avoir soustrait la partie polaire correspondant à d'autres pôles ; divisions euclidiennes successives dans le cas d'un dénominateur de la forme $(X^2+aX+b)^k$ dans $\mathbb{R}(X)$).
- Applications, notamment à des calculs d'intégrales ou de sommes télescopiques.

Prévisions pour la semaine prochaine : groupe symétrique, déterminants (en conservant sûrement une partie du programme de cette semaine).