

# Programme de colle n° 23

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 30/03 au 03/04 2026

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtimements corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

## Chapitre 18 : Intégration.

- Construction de l'intégrale de Riemann :
  - continuité uniforme, **théorème de Heine**
  - espace vectoriel des fonctions en escalier sur un segment, subdivisions adaptées, intégrale des fonctions en escalier, propriétés fondamentales de cette intégrale (linéarité, relation de Chasles, positivité)
  - approximation des fonctions continues par les fonctions en escalier, définition de l'intégrale comme borne supérieure des intégrales de fonctions en escalier minorant  $f$ , égale à la borne inférieure des intégrales de fonctions en escalier majorant  $f$
  - extension des propriétés fondamentales à l'intégrale des fonctions continues et continues par morceaux
- Inégalités et intégrales :
  - intégration d'inégalités sur un segment
  - si  $f$  est continue et positive sur  $[a, b]$ ,  $\int_a^b f(t) dt = 0$  ssi  $f = 0$
  - inégalité triangulaire  $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$
  - **inégalité de Cauchy-Schwartz**  $\left( \int_a^b fg \right)^2 \leq \int_a^b f^2 \times \int_a^b g^2$  (démontrée en étudiant le signe d'un trinôme)
- Exemples d'études de suites d'intégrales.
- Théorème fondamental de l'analyse :  $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est la primitive de  $f$  s'annulant en  $a$ , étude de fonctions définies par des intégrales à bornes variables (exemple vu en cours :  $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\text{sh}(t)}{t} dt$ ), mais bien sûr pas de « vraies » intégrales à paramètres, qui seront vues en deuxième année.
- Extension de l'intégrale aux fonctions à valeurs complexes.
- **Formule de Taylor avec reste intégral**, inégalité de Taylor-Lagrange (la formule avec égalité n'est par contre officiellement pas au programme).
- Sommes de Riemann : convergence vers l'intégrale pour une fonction continue, majoration de l'erreur pour une fonction  $\mathcal{C}^1$ .

Prévisions pour la rentrée : applications linéaires.