

Programme de colle n° 22

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 23/03 au 27/03 2026

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtimements corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 17 : Espaces vectoriels.

- Définitions et exemples d'espaces et de sous-espaces vectoriels.
- Caractérisation des sous-espaces vectoriels (au choix : non vide et stable par somme et produit extérieur, ou non vide et stable par combinaisons linéaires).
- Familles de vecteurs :
 - Combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs, sous-espace vectoriel engendré par une famille, notation Vect et exemples d'utilisation (notamment pour les solutions de systèmes linéaires homogènes)
 - Familles génératrices, familles libres et liées, bases, coordonnées et composantes d'un vecteur dans une base
- Intersection de sous-espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels supplémentaires, caractérisation à l'aide de bases (F et G sont supplémentaires si et seulement si l'union d'une base de F et d'une base de G donne une base de E).
- Dimension :
 - définition d'un espace vectoriel de dimension finie (comme un espace qui admet une famille génératrice finie)
 - théorème de la base incomplète (on doit être capable d'appliquer l'algorithme permettant de compléter une famille libre en base d'un espace vectoriel en piochant des vecteurs dans une famille génératrice)
 - existence de bases dans un espace de dimension finie, lemme de Steinitz, définition de la dimension (toutes les bases ayant le même cardinal)
 - dans un espace de dimension n , toute famille libre (resp. génératrice) est constituée d'au plus (resp. au moins) n vecteurs, toute famille libre **ou** génératrice de n vecteurs est automatiquement une base
 - formule de Grassmann pour la dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels : $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$
 - caractérisations de la supplémentarité à l'aide de la dimension (F et G sont supplémentaires s'ils vérifient deux conditions parmi $F \cap G = \{0\}$, $F + G = E$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$)

- Espaces vectoriels usuels :
 - $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension n admettant pour base canonique $((1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1))$
 - $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension np admettant pour base canonique $(E_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, où E_{ij} est la matrice dont l'unique coefficient non nul est en position (i, j) , et est égal à 1
 - $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension $n+1$ admettant pour base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$, toute famille échelonnée de polynômes est libre
- aucune formule n'a été indiquée en gras pour ce chapitre mais on doit être capable de démontrer des résultats faciles comme « l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel » ou « l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs est un sous-espace vectoriel ». On peut également demander une explication (peu détaillée) du principe de démonstration de la formule de Grassmann (on évitera d'embêter les élèves avec Steinitz par contre).

La colle pourra être complétée par un exercice d'analyse portant sur le programme précédent (développements limités, analyse asymptotique).

Prévisions pour la semaine suivante : intégration (construction théorique de l'intégrale, suite d'intégrales).