

Interrogation Écrite n° 5 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

12 mars 2026

1. (a) On sait que $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ et $(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2)$ (formule du cours pour $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha = \frac{1}{3}$), donc $f(x) = \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right) \left(1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2\right) + o(x^2) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) = 1 + \frac{4}{3}x + \frac{13}{18}x^2 + o(x^2)$.
- (b) Encore un calcul direct : $xe^{-x} = x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$, et $\frac{1}{1+2x} = 1 - 2x + 4x^2 + 8x^3 + o(x^3)$. En fait, le dernier terme de ce deuxième facteur ne servira à rien puisqu'il va être multiplié (au minimum) par x et donc disparaître dans le o . On en déduit que $f(x) = \left(x - x^2 + \frac{1}{2}x^3\right) (1 - 2x + 4x^2) + o(x^3) = x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 2x^3 + 4x^3 + o(x^3) = x - 3x^2 + \frac{13}{2}x^3 + o(x^3)$.
- (c) On écrit bien sûr sous forme exponentielle : $f(x) = e^{\frac{1}{x} \ln(\cos(x))}$. Il faut faire attention à développer le logarithme à l'ordre 4 puisqu'on va ensuite le diviser par x : $\ln(\cos(x)) = \ln\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)$. En posant $u = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$, on a $u \equiv -\frac{1}{2}x^2$ (et en particulier u a une limite nulle), donc $u^3 = o(x^4)$, et $\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + o(x^4) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$. On peut ensuite diviser par x avant de composer : $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)}$. En notant v l'expression dans l'exponentielle (qui a une limite nulle), on a $f(x) = 1 + v + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{6}v^3 + o(v^3) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o(x^3) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{48}x^3 + o(x^3)$.
- (d) Ici, le plus simple est d'utiliser directement la formule de Taylor-Young : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, puis $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$. On en déduit que $f(1) = 1$, $f'(1) = \frac{1}{2}$ et $f''(1) = -\frac{1}{4}$, donc $f(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + o(x-1)^2$ (bien sûr, on ne développe rien de tout ça).
- (e) Une composée classique : $f(x) = \ln\left(2 + x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) = \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)\right)$. On peut poser $u = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)$, qui a une limite nulle, et on développe : $f(x) = \ln(2) + u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + o(u^3) = \ln(2) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o(x^3) = \ln(2) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)$.
2. La fonction f est impaire (produit d'une fonction paire par une fonction impaire) et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ (produit de deux fonctions croissantes et positives). De plus, $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, donc f est bijective de $[0, +\infty[$ vers lui-même. Par pa-

rité, elle est bien bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On a bien sûr $f(x) = x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + o(x^5)$. La réciproque f^{-1} est elle-même impaire, donc a un développement limité en 0 de la forme $f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$. En posant $u = f^{-1}(x)$ (qui a une limite nulle), on calcule $f(f^{-1}(x)) = u + \frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{24}u^5 + o(u^5) = ax + bx^3 + cx^5 + \frac{1}{2}a^3x^3 + \frac{3}{2}a^2bx^5 + \frac{1}{24}a^5x^5 + o(x^5)$. Or, $f(f^{-1}(x)) = x + o(x^5)$, donc par unicité du développement limité, on peut identifier pour obtenir les conditions $a = 1$, puis $b + \frac{1}{2}a^3 = 0$, donc $b = -\frac{1}{2}$ et $c + \frac{3}{2}a^2b + \frac{1}{24}a^5 = 0$, donc $c = \frac{3}{4} - \frac{1}{24} = \frac{17}{24}$. Conclusion : $f^{-1}(x) = x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{17}{24}x^5 + o(x^5)$.

3. On pose dans cette question $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{4x^2 - x + 1}$.

(a) On a bien sûr $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$ (le trinôme sous la racine carrée a un discriminant strictement négatif, il est donc toujours positif). Sans aucune difficulté, on calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$.

(b) On commence bien sûr par poser $X = \frac{1}{x}$, pour avoir une variable X de limite nulle quand x tend vers $+\infty$. On a donc $f(x) = e^X \sqrt{\frac{4}{X^2} - \frac{1}{X} + 1} = \frac{e^X}{X} \sqrt{4 - X + X^2}$ (en supposant $X > 0$ pour pouvoir écrire $\sqrt{X^2} = X$). Autrement dit, $Xf(x) = 2e^X \sqrt{1 - \frac{1}{4}X + \frac{1}{4}X^2}$. On peut maintenant poser $u = -\frac{1}{4}X + \frac{1}{4}X^2$ qui a une limite nulle et faire notre DL : $Xf(x) = 2e^X \left(1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2)\right) = 2 \left(1 + X + \frac{1}{2}X^2\right) \left(1 - \frac{1}{8}X + \frac{1}{8}X^2 - \frac{1}{128}X^2\right) + o(X^2) = \left(1 + X + \frac{1}{2}X^2\right) \left(2 - \frac{1}{4}X + \frac{15}{64}X^2\right) + o(X^2) = 2 - \frac{1}{4}X + \frac{15}{64}X^2 + 2X - \frac{1}{4}X^2 + X^2 + o(X^2) = 2 + \frac{7}{4}X + \frac{63}{64}X^2 + o(X^2)$. On en déduit que $f(x) = \frac{2}{X} + \frac{7}{4} + \frac{63}{64}X + o(X)$, soit $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 2x + \frac{7}{4} + \frac{63}{64x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. Il est temps d'interpréter :

- $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2x$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- $f(x) - 2x - \frac{7}{4} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{63}{64x}$ qui a une limite nulle, donc la droite d'équation $y = 2x + \frac{7}{4}$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$
- l'équivalent donné ci-dessus est positif quand $x \geq 0$, donc la courbe sera au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$

(c) On peut reprendre le calcul précédent avec le même changement de variable quand x tend vers $-\infty$. Seul changement : on ne peut plus écrire $\sqrt{X^2} = X$, mais au contraire $\sqrt{X^2} = -X$, ce qui change tous les signes du développement asymptotique. La droite asymptote en $-\infty$ a donc pour équation $y = -2x - \frac{7}{4}$, et la courbe restera au-dessus de cette asymptote au voisinage de $-\infty$ (le signe du coefficient a changé, mais celui de x aussi, ce qui compense). Pour la courbe, évidemment, j'ai de mon côté fait tracer la « vraie » courbe par mon ordinateur :

