

Interrogation Écrite n° 5

MPSI Lycée Camille Jullian

12 mars 2026

Énoncé :

1. Calculer les développements limités suivants (bien entendu, je veux tout le détail du calcul) :
 - (a) DL_2 en 0 de $f(x) = e^x \sqrt[3]{1+x}$
 - (b) DL_3 en 0 de $f(x) = \frac{xe^{-x}}{2x+1}$
 - (c) DL_3 en 0 de $f(x) = (\cos(x))^{\frac{1}{x}}$
 - (d) DL_2 en 1 de $f(x) = \sqrt{x}$
 - (e) DL_3 en 0 de $f(x) = \ln(2 + \sin(x))$

2. On pose dans cette question $f(x) = x \operatorname{ch}(x)$. Montrer rapidement que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Quelle est la parité de f ? Donner le DL_5 en 0 de f , puis calculer le DL_5 en 0 de sa réciproque f^{-1} (sans chercher à trouver une expression explicite de f^{-1}).

3. On pose dans cette question $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{4x^2 - x + 1}$.
 - (a) Quel est le domaine de définition de f ? Quelles sont les limites éventuelles de f en 0?
 - (b) À l'aide d'un calcul de développement asymptotique, montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$. On précisera bien sûr l'équation de cette asymptote ainsi que la position locale de la courbe par rapport à l'asymptote.
 - (c) Que se passe-t-il du côté de $-\infty$ (on évitera de refaire des calculs)? Tracer une allure crédible de la courbe $\mathcal{C}_f$ (sans chercher à étudier ses variations, on ne tiendra compte que des limites et asymptotes calculées).