Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 9 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

30 avril 2026

Exercice 1

1. Appliquons la définition : $\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = [\ln(t)]_x^1 = -\ln(x)$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} -\ln(x) = +\infty$, la focntion inverse n'est effectivement pas intégrable sur $[0,1]$. Par contre, $\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = [2\sqrt{t}]_x^1 = 2-2\sqrt{x}$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = 2$, ce qui prouve que $t\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable, et que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = 2$.
2. Le cas $\alpha = 1$ a déjà été traité à la question précédente (la fonction n'est alors pas intégrable). Si $\alpha \neq 1$, $\displaystyle\int_x^1 t^{-\alpha}\,dt = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_x^1 = \frac{1-x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. Ce quotient a une limite infinie quand $1-\alpha < 0$, donc quand $\alpha > 1$, ce qui prouve que la fonction n'est pas intégrable dans ce cas. Si $\alpha < 1$ par contre, la limite est finie, et on peut même affirmer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \frac{1}{1-\alpha}$.
3. Appliquer la linéarité à des intégrales impropres ne pose aucun problème (si les limites existent, le calcul de limite est toujours linéaire), donc $\displaystyle I_1 = \int_0^1 \frac{1-t}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt - \int_0^1 \sqrt{t}\,dt = 2 - \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$. De même, $\displaystyle I_2 = \int_0^1 \frac{1-2t+t^2}{\sqrt{t}}\,dt = 2 - 2\times\frac{2}{3} + \int_0^1 t^{\frac{3}{2}}\,dt = 2 - \frac{4}{3} + \left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16}{15}$. Les plus courageux auront pu vérifier ces valeurs à l'aide de la formule explicite donnée dans l'énoncé de la dernière question de l'exercice.
4. Lorsque $t \in [0,1]$, $1-t \in [0,1]$ donc $0 \leqslant (1-t)^{n+1} \leqslant (1-t)^n$. Après produit par $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et intégration entre 0 et 1, on en déduit directement $I_{n+1} \leqslant I_n$ (là encore, le fait de travailler avec des intégrales impropres ne pose aucun problème, le passage à la limite conservant les inégalités). La suite (I_n) est donc décroissante. Comme elle est minorée par 0 (on intègre des fonctions positives sur $[0,1]$), elle converge donc.
5. Par relation de Chasles, $\displaystyle I_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{(1-t)^n}{\sqrt{t}}\,dt + \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{(1-t)^n}{\sqrt{t}}\,dt$. Or, sur $\left[0, \dfrac{1}{n}\right]$, $(1-t)^n \leqslant 1$, donc $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{(1-t)^n}{\sqrt{t}}\,dt \leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$. De même, sur $\left[\dfrac{1}{n}, 1\right]$, $\dfrac{1}{\sqrt{t}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \sqrt{n}$ (l'inverse de la racine carrée étant bien sûr une fonction décroissante), donc $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{(1-t)^n}{\sqrt{t}}\,dt \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^1 \sqrt{n}(1-t)^n\,dt \leqslant \int_0^1 \sqrt{n}(1-t)^n\,dt$ (l'intégrale d'une fonction positive sur tout le segment est plus grande que celle calculée sur un sous-segment). Or, on sait très bien calculer les deux intégrales obtenues dans cette majoration : $\displaystyle I_n \leqslant [2\sqrt{t}]_0^{\frac{1}{n}} + \sqrt{n}\left[\frac{-(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}}{n+1}$. Ce

majorant tend vers vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qui suffit (théorème des gendarmes, I_n étant toujours positive) à affirmer que $\lim I_n = 0$.

6. On écrit simplement, par linéarité, $I_n - I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^n - (1-t)^{n+1}}{\sqrt{t}}\, dt$ $= \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^n(1-1+t))}{\sqrt{t}}\, dt = \int_0^1 \sqrt{t}(1-t)^n\, dt$. On aura du mal à faire mieux, passons donc au calcul d'IPP sur I_{n+1}, en posant $u(t) = (1-t)^{n+1}$, donc $u'(t) = -(n+1)(1-t)^n$, et $v'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ qu'on peut intégrer en $v(t) = 2\sqrt{t}$. On obtient alors $I_{n+1} = \left[2\sqrt{t}(1-t)^{n+1}\right]_0^1 +$ $2(n+1)\displaystyle\int_0^1 \sqrt{t}(1-t)^n\, dt$. Le crochet s'annule et l'intégrale restante (au facteur $2(n+1)$ près) est exactement celle obtenue lors de notre premier calcul. On a donc bien $I_{n+1} = (2n+2)(I_n - I_{n+1})$.
7. On peut réécrire la relation précédente sous la forme $(2n+3)I_{n+1} = (2n+2)I_n$, donc $I_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+3} I_n$. En appliquant cette relation pour $n = 2$ (attention à ne pas décaler), $I_3 = \dfrac{6}{7} \times I_2 = \dfrac{6}{7} \times \dfrac{16}{15} = \dfrac{32}{35}$. Puis, en appliquant la formule pour $n = 3$, $I_4 = \dfrac{8}{9} \times \dfrac{32}{35} = \dfrac{256}{315}$. Là encore, on vérifie « facilement » que ces valeurs sont conformes à la formule générale qu'on va maintenant démontrer.
8. Puisqu'on a une formule explicite et une relation de récurrence, on va évidemment procéder par récurrence. Pour $n = 0$, $\dfrac{2^1 \times (0!)^2}{1!} = 2$, ce qui correspond bien à la valeur de I_0. Si on suppose la formule vraie au rang n, alors $I_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+3} I_n = \dfrac{2^{2n+2}(n!)^2(n+1)}{(2n+1)!(2n+3)}$. On rajoute volontairement un facteur $2n+2 = 2(n+1)$ au numérateur et au dénominateur de ce quotient pour obtenir $I_{n+1} = \dfrac{2^{2n+3}(n!)^2(n+1)^2}{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)} = \dfrac{2^{2n+3}((n+1)!)^2}{(2n+3)!}$, soit exactement la formule à démontrer pour prouver notre hérédité.

Exercice 2

1. Puisqu'on nous y force : $f(\lambda(x,y,z) + \mu(x',y',z')) = f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') = (4\lambda x + 4\mu x' - \lambda y - \mu y' - 2\lambda z - 2\mu z', -\lambda x - \mu x' + 2\lambda z + 2\mu z', 5\lambda x + 5\mu x' - \lambda y - \mu y' - 3\lambda z - 3\mu z') = \lambda(4x - y - 2z, -x + 2z, 5x - y - 3z) + \mu(4x' - y' - 2z', -x' + 2z', 5x' - y' - 3z') = \lambda f(x,y,z) + \mu f(x',y',z')$. L'application f est bien une application linéaire.
2. C'est en fait trivial : $f - id$ est une application linéaire, donc $(f-id)(0) = 0$. Si $u \in \ker(f - id)$, on a $(f-id)(u) = 0$, donc $(f-id)^2(u) = (f-id)(0) = 0$, ce qui prouve que $u \in \ker((f-id)^2)$.
3. On veut donc trouver les vecteurs u vérifiant $f(u) - u = 0$, ce qui revient à résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & - & 2z & = & 0 \\ -x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 5x & - & y & - & 4z & = & 0 \end{array}\right.$. Les opérations $L_1 \to L_1 - L_2$ et $L_3 \to L_3 - L_2$ permettent d'obtenir le système équivalent : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x & & & - & 4z & = & 0 \\ -x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 6x & & & - & 6z & = & 0 \end{array}\right.$. Les deux équations extrêmes sont manifestement équivalentes et imposent $x = z$, puis la deuxième donne $y = 2z - x = x$, donc $\ker(f - id) = \mathrm{Vect}((1,1,1))$. En particulier, $\dim(\ker(f - id)) = 1$.
4. On calcule d'abord $(f - id)(x,y,z) = (3x - y - 2z, -x - y + 2z, 5x - y - 4z)$. En posant $X = 3x - y - 2z$, $Y = -x - y + 2z$ et $Z = 5x - y - 4z$, on a donc $(f - id)^2(x,y,z) = (3X - Y - 2Z, -X - Y + 2Z, 5X - Y - 4Z) = (9x - 3y - 6z + x + y - 2z - 10x + 2y + 8z, -3x + y + 2z + x + y - 2z + 10x - 2y - 8z, 15x - 5y - 10z + x + y - 2z - 20x + 4y + 16z) = (0, 8x - 8z, -4x + 4z)$.

5. Je ne vais même pas m'embêter à écrire le système à résoudre cette fois-ci tant il est trivial : la seule condition restante est $z = x$, donc $\ker((f - id)^2) = \{(x, y, x) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 0))$. En particulier, ce nouveau noyau est bien sûr de dimension 2 puisque les deux vecteurs obtenus ne sont pas proportionnels et forment donc une base de $\ker((f-id)^2)$. On peut sans problème remplacer le premier de ces deux vecteurs par leur somme pour obtenir $\ker((f - id)^2) = \text{Vect}((1, 1, 1), (0, 1, 0))$, et on a alors la forme demandée par l'énoncé, avec $e_1 = (1, 1, 1) \in \ker(f - id)$ et $e_2 = (0, 1, 0) \notin \ker(f - id)$.
6. On veut désormais avoir $f(u)+u = 0$, ce qui donne le nouveau système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 5x & - & y & - & 2z & = & 0 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 5x & - & y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right.$.
La dernière équation est manifestement redondante, on effectue alors l'unique opération $L_1 \to L_1 + L_2$ pour obtenir $4x = 0$, donc $x = 0$. La seule équation restante impose alors $y + 2z = 0$, donc $y = -2z$, et $\ker(f + id) = \text{Vect}((0, -2, 1))$. En particulier, $\dim(\ker(f + id)) = 1$, et (en anticipant la question suivante), le vecteur $e_3 = (0, -2, 1)$ est une base de ce noyau.
7. Si on suppose $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$, alors l'équation obtenue pour la première coordonnée impose déjà $\lambda_1 = 0$. Les deux vecteurs restants n'étant pas proportionnels, on aura aussi $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, donc la famille est libre. Comme il s'agit d'une famille de trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
8. On souhaite écrire $u = (x, y, z) = a(1, 1, 1) + b(0, 1, 0) + c(0, -2, 1)$, ce qui nous mène à résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & & & & & = & x \\ a & + & b & - & 2c & = & y \\ a & & & + & c & = & z \end{array}\right.$. Le système étant déjà triangulaire, il se résout tout seul $a = x$, $c = z-a = z-x$ et $b = y-a+2c = y-x+2z-2x = -3x+y+2z$. Finalement, $u = (x, -3x + y + 2z, z - x)_{(e_1,e_2,e_3)}$.
9. Par définition, $e_1 \in \ker(f - id)$, donc $f(e_1) = e_1$. Une récurrence triviale (est-ce même vraiment nécessaire de le préciser ?) permet d'en déduire que $f^n(e_1) = e_1 = (1, 1, 1)$. De même, $e_3 \in \ker(f + id)$, donc $f(e_3) = -e_3$, et on en déduit immédiatement que $f^n(e_3) = (-1)^n e_3 = (0, 2(-1)^{n+1}, (-1)^n)$.
10. Comme $f - id$ et id commutent, c'est un simple binôme de Newton appliqué à l'égalité $f = (f - id) + id$ (bien sûr, les « puissances » de l'application identité sont égales à id et disparaissent de l'expression finale). Encore une brillante réusite pour l'astuce belge. Comme $e_2 \in \ker((f - id)^2)$, on aura bien sûr $(f - id)^2(e_2) = 0$ mais aussi $(f - id)^k(e_2) = 0$ pour tout entier $k \geqslant 2$. Si on applique la formule obtenue par Newton au vecteur e_2, on a donc $f^n(e_2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} (f - id)^k(e_2) = e_2 + n(f - id)(e_2) = nf(e_2) - (n - 1)e_2$. Comme $f(e_2) = f(0, 1, 0) = (-1, 0, -1)$, on a $f^n(e_2) = (-n, 1 - n, -n)$.
11. En combinant les résultats des trois dernières questions, $f^n(x, y, z) = f^n(xe_1 + (-3x + y + 2z)e_2 + (z - x)e_3) = x(1, 1, 1) + (-3x+y+2z)(-n, 1-n, -n) + (z-x)(0, 2(-1)^{n+1}, (-1)^n) = (x + 3nx - ny - 2nz, x + (3n - 3)x + (1 - n)y = (2 - 2n)z + 2(-1)^{n+1}z + 2(-1)^n x, x + 3nx - ny - 2nz + (-1)^n z + (-1)^{n+1}x) = ((3n + 1)x - ny - 2nz, (3n - 2 + 2(-1)^n)x + (1 - n)y + (2 - 2n + (-1)^{n+1})z, (3n + 1 + (-1)^{n+1})x - ny + ((-1)^n - 2n)z)$. Passionnant.

Exercice 3

A. Un exemple dans $\mathbb{R}^3$.

1. Pour étudier l'injectivité, on cherche les vecteurs du noyau. Or, $sif(x, y, z) = 0$, on a directement $y = 0$ (deuxième coordonnée), donc $x + z = -2x + 4z = 0$. Ces deux conditions ne sont compatibles que si $x = z = 0$, ce qui prouve que $\ker(f) = \{0\}$. L'application f est donc injective, et comme il s'agit d'un endomorphisme en dimension finie, elle est aussi surjective et bijective.

2. Calculons brutalement : en posant $X = x + y + z$, $Y = 2y$ et $Z = -2x + 2y + 4z$, alors $f^2(x, y, z) = (X + Y + Z, -2Y, -2X + 2Y + 4Z) = (x + y + z + 2y - 2x + 2y + 4z, 4y, -2x - 2y - 2z + 4y - 8x + 8y + 16z) = (-x + 5y + 5z, 4y, -10x + 10y + 14z)$. Or, $(5f - 6\,id)(x, y, z) = (5x + 5y + 5z, 10y, -10x + 10y + 20z) - (6x, 6y, 6z) = (-x + 5y + 5z, 4y, -10x + 10y + 14z)$. Les deux expressions obtenues étant identiques, on en déduit bien que $f^2 = 5f - 6\,id$.
3. Pour trouver les vecteurs vérifiant $f(u) - 3u = 0$, on résout le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & + & z & = & 0 \\ & - & y & & & = & 0 \\ -2x & + & 2y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$.
Puisque $y = 0$ (deuxième équation), les deux équations extrêmes deviennent identiques : $-2x + z = 0$, donc $z = 2x$ et $\ker(f - 3\,id) = \text{Vect}((1, 0, 2))$. De même, on obtient le deuxième noyau constitué des vecteurs vérifiant $f(u) - 2u = 0$ en résolvant $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ -2x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$.
La seule condition est $x = y + z$, donc $\ker(f - 2\,id) = \text{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, 1))$.
4. La somme deux dimensions des deux sous-espaces obtenus étant égale à 3, il suffit de prouver que $\ker(f - 3\,id) \cap \ker(f - 2\,id) = \{0\}$. Pour cela, on cherche si $(1, 0, 2) \in \ker(f - 2\,id)$, donc si $(1, 0, 2) = a(1, 1, 0) + b(1, 0, 1)$. On obtient les équations $a + b = 1$, $a = 0$ et $b = 2$, qui sont très clairement incompatibles, donc $(1, 0, 2)$ n'est pas combinaison linéaires des deux autres vecteurs, et la famille constitée de ces trois vecteurs est libre, donc est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui prouve bien que $\ker(f - 3\,id) \oplus \ker(f - 2\,id) = \mathbb{R}^3$.
5. Puisque $(f - 2\,id)(x, y, z) = (-x + y + z, 0, -2x + 2y + 2z)$, il suffit de calculer $-(-x - y + z) + (-2x + 2y + 2z) = -x - y + z$ pour constater que $(f - 2\,id)^2(x, y, z) = (-x + y + z, 0, 2(-x - y + z)) = (f - 2\,id)(x, y, z)$, et donc que $f - 2\,id$ est bien un projecteur.

B. Cas général.

1. Puisque $f \circ (f - 5\,id) = -6\,id$, on a $f \circ \left(\dfrac{5}{6}\,id - \dfrac{1}{6}f\right) = id$, ce qui prouve que f est bijective et que $f^{-1} = \dfrac{5}{6}\,id - \dfrac{1}{6}f$.
2. On va faire un pur calcul formel : $p^2 = (f - 3\,id)^2 = f^2 - 6f + 9\,id = 5f - 6\,id - 6f + 9\,id = -f + 3\,id = p$, donc p est un projecteur (on a évidemment exploité en cours de calcul l'hypothèse $f^2 = 5f - 6\,id$). De même, $q^2 = (f - 2\,id)^2 = f^2 - 4f + 4\,id = 5f - 6\,id - 4f + 4\,id = f - 2\,id = q$, donc q est aussi un projecteur.
3. Encore du calcul formel : $f \circ p = f \circ (3\,id - f) = 3f - f^2 = 3f - 5f + 6\,id = 6\,id - 2f = 2(3\,id - f) = 2p$, et $f \circ q = f^2 - 2f = 5f - 6\,id - 2f = 3(f - 2\,id) = 3q$.
4. On va effectuer une récurrence en utilisant les calculs de la question précédente. Pour $n = 1$, $3q + 2p = 3f - 6\,id + 6\,id - 2f = f$, donc la formule est vérifiée. Si on la suppose vraie au rang n, alors $f^{n+1} = f \circ f^n = f \circ (3^n q + 2^n p) = 3^n f \circ q + 2^n f \circ p = 3^{n+1} q + 2^{n+1} p$, ce qui démontre l'hérédité.
5. Pour $n = 0$, la formule affirme que $f^0 = q + p = f - 2\,id + 3\,id - f = id$, ce qui est vrai. Pour les puissances négatives, constatons que $\dfrac{1}{3}q + \dfrac{1}{2}p = \dfrac{1}{3}f - \dfrac{2}{3}\,id + \dfrac{3}{2}\,id - \dfrac{1}{2}f = \dfrac{5}{6}\,id - \dfrac{1}{6}f = f^{-1}$, ce qui prouve la formule lorsque $n = -1$. Or, $f^{-1} \circ q = \dfrac{5}{6}q - \dfrac{1}{6}f \circ q = \dfrac{5}{6}q - \dfrac{1}{2}q = \dfrac{1}{3}q$, et $f^{-1} \circ p = \dfrac{5}{6}p - \dfrac{1}{6}f \circ p = \dfrac{5}{6}p - \dfrac{1}{3}p = \dfrac{1}{2}p$. On peut alors effectuer la même récurrence que précédemment pour prouver que $f^{-n} = \dfrac{1}{2^n}q + \dfrac{1}{2^n}p$ pour tout entier $n \geqslant 1$, ce qui prouve bien la formule attendue pour les entiers $n < 0$.
6. La première partie de la question est triviale si on est un peu astucieux : comme $p + q = id$, on peut écrire, pour tout vecteur $u \in E$, $u = p(u) + q(u)$, ce qui prouve immédiatement que $u \in$

$\mathrm{Im}(p)+\mathrm{Im}(q)$, et donc que $\mathrm{Im}(p)+\mathrm{Im}(q)=E$. Vérifions maintenant que l'indication donnée dans l'énoncé est correcte : $p\circ q=(3\,id-f)\circ(f-2\,id)=3f-6\,id-f^2+2f=-f^2+5f-6\,id=0$ d'après l'hypothèse faite sur f. De même, bien sûr, $q\circ p=0$. On en déduit immédiatement que $\mathrm{Im}(p)\subset\ker(q)$ et $\mathrm{Im}(q)\subset\ker(p)$, et donc que $\ker(q)+\ker(p)=E$ puisqu'on avait déjà $\mathrm{Im}(p)+\mathrm{Im}(q)=E$. Il ne reste donc plus qu'à prouver que $\ker(p)\cap\ker(q)=\{0\}$. Or, si u appartient à ces deux noyaux simultanéments, alors $u=p(u)+q(u)=0$. Les deux noyaux sont donc bel et bien supplémentaires.

7. À cause de l'inclusion des images dans les noyaux déjà signalée à la question précédente, on a toujours $p(u)\in\ker(q)$ et $q(u)\in\ker(p)$. La décomposition $u=p(u)+q(u)$ correspond donc à l'unique décomposition du vecteur u dans les sous-espaces supplémentaires $\ker(p)$ et $\ker(q)$, et la projection sur $\ker(q)$ parallèlement à $\ker(p)$ conserve donc le vecteur $p(u)$, ce qui prouve que cette projection est l'application p. Bien sûr, symétriquement, q sera la projection sur F parallèlement à G. On sait de toute façon que $q=id-p$, ce qui est cohérent avec ce renversement du rôle des sous-espaces F et G.

Exercice 4

1. (a) C'est évidemment un très grand classique. Une décomposition en éléments simples triviale (ou une astruce belge) permet d'écrire $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n+1-n}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}=1-\frac{1}{n+1}$, qui converge vers $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$.

   (b) Calculons d'abord le dénominateur $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}k^2+k=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{6}(2n+1+3)=\frac{n(n+1)2(n+2)}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. On en déduit bien $u_n=\dfrac{3n}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{3}{(n+1)(n+2)}$.

   (c) C'est quasiment le même calcul que tout à l'heure : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{(n+1)(n+2)}=3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}=\frac{3}{2}-\frac{3}{n+2}$, qui converge vers $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=\frac{3}{2}$. On constate sans grande difficulté que $\dfrac{3}{2}\leqslant 2\times 1$.

2. (a) C'est une somme de série exponentielle, mais il faut quand même faire attention au fait que la somme démarre à l'indice 1, alors que la formule du cours stipule que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$. Ici, bien sûr, $x=1$, et il manque donc le premier terme de valeur 1, ce qui implique que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}=e-1$.

   (b) C'est trivial : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k\geqslant a_n=n!$, donc $u_n\leqslant\dfrac{n}{n!}=\dfrac{1}{(n-1)!}$.

   (c) La série de terme général u_n étant une série à termes positifs majorée par une série exponentielle convergeant vers e (cette fois-ci, le fait qu'on ait un $(n-1)!$ au dénominateur ramène au calcul de la série complète), elle converge vers une somme inférieure ou égale à

e. Or, $2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}=2e-2\geqslant e$ (puisque $e>2$), donc on a bien $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n\leqslant e\leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$.

3. (a) En développant tout, on obtient manifestement une expression du second degré, avec un coefficient dominant égal à $\sum_{k=1}^{n}b_k^2$ (qui ne risque sûrement pas d'être nul). Ce trinôme, en tant que somme de carrés, est toujours positif, donc il a un discriminant négatif ou nul. Or, $f(x)=\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)+\left(2\sum_{k=1}^{n}b_kc_k\right)x+\sum_{k=1}^{n}c_k^2$, donc ce discriminant vaut $\Delta=4\left(\sum_{k=1}^{n}b_kc_k\right)^2-4\sum_{k=1}^{n}b_k^2\sum_{k=1}^{n}c_k^2$, qui est donc négatif. À une division par quatre près, on a exactement l'inégalité souhaitée.

(b) Il faut bien choisir les réels à qui appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwartz qu'on vient de démontrer. Si on regarde bien ce qu'on veut obtenir, on pose $b_k=\sqrt{a_k}$, pour avoir un premier facteur à droite de l'inégalité qui vaut $\sum_{k=1}^{n}b_k^2=\sum_{k=1}^{n}a_k$, et $c_k=\frac{k}{\sqrt{a_k}}$, pour obtenir un deuxième facteur $\sum_{k=1}^{n}c_k^2=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}$, soit exactement les deux facteurs de la majoration demandée. Vérifions maintenant ce qu'il y a à gauche avec ce choix de réels : $\sum_{k=1}^{n}b_kc_k=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}\times\frac{k}{\sqrt{a_k}}=\sum_{k=1}^{n}k$, donc effectivement ce qu'on a dans le membre de gauche de la majoration demandée. Bref, on a prouvé exactement ce qu'on voulait.

(c) Rappelons que $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$, donc on a prouvé que $\frac{n^2(n+1)^2}{4(a_1+\cdots+a_n)}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}$. Or, $\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$. En multipliant la majoration précédente par $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ et en passant le facteur 4 de l'autre côté, on obtient exactement la nouvelle inégalité demandée.

(d) On additionne toutes les inégalités précédentes pour n variant entre 1 et N. Le membre de droite donne alors une somme télescopique un peu inhabituelle $\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\right)-\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{4}{(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\right)=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\right)-\sum_{n=2}^{N+1}\left(\frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2}{a_k}\right)$. Après simplification, il reste le terme numéro 1 de la somme de gauche qui vaut $\frac{4}{a_1}$, chaque dernier terme de la somme intérieure de gauche lorsque k varie entre 2 et N, terme qui vaut $\frac{4}{n^2}\times\frac{n^2}{a_n}=\frac{4}{a_n}$, et bien sûr le terme numéro $N+1$ de la somme de droite, qui est positif (pas besoin de le détailler, sa valeur précise n'a aucune importance). Globalement, on a donc quelque chose d'inférieur à $\frac{4}{a_1}+\sum_{n=2}^{N}\frac{4}{a_n}=4\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{a_k}$.

(e) La série de terme général $\frac{2n+1}{a_1+\cdots+a_n}$ converge donc (c'est une série à termes positifs majorée) vers une somme inférieure à $4S$, en posant $S=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$. Comme bien sûr $n\leqslant$

$\frac{1}{2}(2n+1)$, on a $\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{a_1+\cdots+a_n}$, donc $\sum u_n$ converge vers une somme inférieur ou égale à $\frac{1}{2} \times 4S = 2S$.

4. Dans ce cas particulier, les séries convergent trivialement puisqu'il s'agit en fait de sommes finies : dès que $n > N$, $\frac{1}{a_n} = 0$ et $u_n = \frac{n}{a_1+\cdots+a_n} = 0$. Calculons alors les valeurs des sommes de « séries » correspondantes : $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$. Bon, on ne sait pas vraiment ce que ça vaut, c'est la somme partielle H_N de la série harmonique. Par ailleurs, pour $n \leqslant N$, $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(n+1)}{2}$, donc $u_n = \frac{2}{n+1}$, donc $\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n+1} = 2H_{N+1} - 2$ (après un décalage d'indice trivial). Le quotient $\frac{\sum u_n}{\sum \frac{1}{a_n}}$ (ici, j'utilise abusivement le sympbole somme sans indice pour désigner la somme de la série) est donc égal à $\frac{2H_{N+1}-2}{H_N}$. Si on fait varier N et qu'on le fait tendre vers $+\infty$, ce quotient est équivalent à $\frac{2\ln(N+1)}{\ln(N)}$ (équivalent classique de la somme partielle de la série harmonique vu en cours, le -2 du numérateur est négligeable puisque la série diverge), et converge donc vers 2 puisque $\ln(N+1) = \ln(N) + \ln\left(1+\frac{1}{N}\right) \sim \ln(N)$. On peut donc rendre ce quotient aussi proche de 2 qu'on le souhaite, ce qui démontre que la constante 2 ne peut pas être améliorée.