Devoir Surveillé n$^\text{o}$ 9

MPSI Lycée Camille Jullian

30 avril 2026

Exercice 1

Si f est une fonction continue sur $]0,1]$ mais ayant une limite infinie en 0, l'intégrale impropre de f sur l'intervalle $[0,1]$ est définie par $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt = \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 f(t)\ dt$ lorsque cela a un sens (donc lorsque cette limite est finie). On dit alors que la fonction f est intégrale sur le segment $[0,1]$.

1. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $[0,1]$, mais que $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrale, et donner la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\ dt$.
2. Montrer plus généralement que $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ est une fonction intégrable sur $[0,1]$ si et seulement si $\alpha < 1$.
3. On note désormais, pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{\sqrt{t}}\ dt$ (on **admet** que cette cette intégrale existe toujours). Calculer I_1 et I_2 (on rappelle que I_0 a déjà été calculée).
4. Montrer que la suite (I_n) est monotone, en déduire sa convergence.
5. Montrer que $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{t}}\ dt + \int_{\frac{1}{n}}^1 \sqrt{n}(1-t)^n\ dt \leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{t}}\ dt + \sqrt{n}\int_0^1 (1-t)^n\ dt$. En déduire la limite de la suite (I_n).
6. Exprimer $I_n - I_{n+1}$ sous forme d'une seule intégrale, puis montrer à l'aide d'une IPP (on admet qu'on a le droit de rédiger nos IPP avec des fonctions intégrables sur $[0,1]$ comme on en a l'habitude) que $I_{n+1} = (2n+2)(I_n - I_{n+1})$.
7. En déduire les valeurs de I_3 et I_4.
8. Montrer enfin que $I_n = \dfrac{2^{2n+1} \times (n!)^2}{(2n+1)!}$.

Exercice 2

On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (4x-y-2z, -x+2z, 5x-y-3z) \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est une application linéaire (en rédigeant vraiment le calcul).
2. Montrer, en faisant le moins de calculs possible, que $\ker(f - id) \subset \ker((f-id)^2)$.
3. Déterminer une base et la dimension de $\ker(f - id)$.
4. Calculer explicitement l'expression de $(f - id)^2$.

5. Déterminer une base et la dimension de $\ker((f-id)^2)$. Montrer qu'on peut écrire $\ker((f-id)^2) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, avec $e_1 \in \ker(f-id)$ et $e_2 \notin \ker(f-id)$.
6. Calculer une base et la dimension de $\ker(f+id)$.
7. Montrer que la famille obtenue en complétant (e_1, e_2) à l'aide d'un vecteur non nul $e_3 \in \ker(f+id)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
8. Calculer les coordonnées d'un vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dans la base (e_1, e_2, e_3).
9. Pour tout entier $n \geqslant 1$, calculer $f^n(e_1)$ et $f^n(e_3)$ (très peu de calculs nécessaires normalement).
10. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $f^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f-id)^k$. En déduire la valeur de $f^n(e_2)$.
11. Déduire des questions précédentes une expression explicite de $f^n(x, y, z)$.

Exercice 3

On s'intéresse dans cet exercice aux endomorphismes f d'un espace vectoriel E (aucune hypothèse a priori sur E) vérifiant $f^2 = 5f - 6\,id$.

A. Un exemple dans $\mathbb{R}^3$.

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = (x+y+z, 2y, -2x+2y+4z)$ (on ne demande **pas** cette fois-ci de prouver que f est un endomorphisme, ce sera admis pour la suite de l'exercice).

1. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
2. Montrer que $f^2 = 5f - 6\,id$.
3. On note $F = \ker(f - 3\,id)$ et $G = \ker(f - 2\,id)$. Donner une base de chacun de ces deux sous-espaces vectoriels.
4. Montrer que F et G sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
5. Donner l'expresion explicite de $f - 2\,id$, et vérifier à l'aide de cette expression que cette application est un projecteur.

B. Cas général.

Dans cette partie, f est un endomorphisme vérifiant $f^2 = 5f - 6\,id$ dans un espace vectoriel E quelconque.

1. Montrer que f est nécessairement un automorphisme de E, et exprimer sa réciproque f^{-1} en fonction de f et de id (pratiquement aucun calcul nécessaire).
2. On pose $p = 3\,id - f$ et $q = f - 2\,id$. Montrer que p et q sont des projecteurs.
3. Calculer $f \circ p$ et $f \circ q$ (le but est d'obtenir un résultat simple en fonction de p et q).
4. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $f^n = 3^n q + 2^n p$.
5. Montrer que la relation précédente reste valable pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$.
6. Montrer que $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q) = E$, puis que $\ker(p) \oplus \ker(q) = E$ (on pourra éventuellement exploiter, après l'avoir démontré, le fait que $p \circ q = 0$).
7. Montrer que p est la projection sur $G = \ker(q)$ parallèlement à $F = \ker(p)$. Que peut-on dire alors de la projection q ?

Exercice 4

Dans tout cet exercice, $(a_n)_{n\geqslant 1}$ désigne une suite de réels strictement positifs, et on suppose que la série $\sum \frac{1}{a_n}$ converge. Le but est de prouver que, en posant $u_n = \frac{n}{a_1+\cdots+a_n}$, la série $\sum u_n$ converge également, et que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$.

1. Dans cette question, on traite l'exemple $a_n = n(n+1)$.
   (a) Montrer que la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge, et calculer la valeur de sa somme.
   (b) Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $u_n = \frac{3}{(n+1)(n+2)}$.
   (c) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, et vérifier que cette somme vérifie bien l'inégalité $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$.
2. Dans cette question, on traite un deuxième exemple, où $a_n = n!$.
   (a) Rappeler la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}$.
   (b) Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $u_n \leqslant \frac{1}{(n-1)!}$.
   (c) En déduire la convergence de $\sum u_n$, et l'inégalité $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$.
3. On traite enfin dans cette question le cas général. On va commencer par prouver l'inégalité de Cauchy-Schwartz dans le cas discret : si $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ et $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ sont des n-uplets de réels tous strictement positifs, alors $\left(\sum_{k=1}^{n} b_k c_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} c_k^2\right)$.
   (a) En posant $f(x) = \sum_{k=1}^{n}(b_k x + c_k)^2$, montrer que f est une fonction polynômiale de degré 2, calculer son discriminant, puis en déduire l'inégalité de Cauchy-Schwartz.
   (b) En revenant aux notations générales de cet exercice, montrer à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwartz que $\forall n \geqslant 1$, $(1+2+\cdots+n)^2 \leqslant (a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{4}{a_2}+\cdots+\frac{n^2}{a_n}\right)$.
   (c) Utiliser le résultat précédent pour démontrer que $\frac{2n+1}{a_1+\cdots+a_n} \leqslant 4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}$.
   (d) En déduire que $\forall N \geqslant 1$, $\sum_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant 4\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{a_k}$.
   (e) Montrer enfin que $\sum \frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ est une série convergente, puis montrer le résultat annoncé en début d'exercice dans le cas général.
4. On admet qu'on peut étendre l'étude effectuée dans cet exercice à des familles d'éléments (a_n) de $\overline{\mathbb{R}^{+*}}$, en imposant la condition logique $\frac{1}{+\infty} = 0$. On définit alors, après avoir fixé un entier N, une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ par $a_n = n$ si $n \leqslant N$, et $a_n = +\infty$ si $n > N$. En exploitant ces suites, montrer que la constante 2 apparaissant à droite de l'inégalité démontrée ne peut pas être améliorée.