Devoir Surveillé n° 5

MPSI Lycée Camille Jullian

10 janvier 2026

Exercice 1

Dans cet exercice, on note r et s les deux applications définies sur $\mathbb{C}$ par $r(z) = iz$ et $s(z) = \overline{z}$. On utilisera systématiquement dans cet exercice la notation f^2 pour désigner la composée $f \circ f$, et la notation f^3 pour $f \circ f \circ f$.

1. Rappeler à quelle transformation géométrique du plan complexe correspond l'application s. Préciser de même les transformations géométriques correspondant aux applications r, r^2 et r^3, ainsi que celles correspondant aux trois composées $s \circ r$, $s \circ r^2$ et $s \circ r^3$ (pas de justification demandée pour cette question).
2. Justifier que toutes les applications évoquées à la question 1 sont bijectives de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, et préciser la réciproque de chacune. En déduire que l'ensemble $G = \{id, r, r^2, r^3, s, s \circ r, s \circ r^2, s \circ r^3\}$ est stable par passage à la réciproque.
3. Que vaut $r^4 = r^3 \circ r$? Calculer également $r \circ s$, $r^2 \circ s$ et $r^3 \circ s$ (en montrant en particulier que ces trois composées sont des élèments de G), puis en déduire en faisant le moins de calculs possible que G est un ensemble stable par composition.
4. Déduire des questions précédentes que $(G, \circ)$ est un groupe. S'agit-il d'un groupe abélien ?
5. Donner la liste de tous les sous-groupes de G ne contenant que deux éléments.
6. Montrer que $H_1 = \{id, r, r^2, r^3\}$ est un sous-groupe de G, et donner la table de Cayley du groupe H_1 (sans justification).
7. Montrer que $H_2 = \{id, r^2, s, s \circ r^2\}$ est également un sous-groupe de G, et donner sa table de Cayley.
8. Montrer qu'il ne peut **pas** exister d'isomorphisme entre les groupes H_1 et H_2 (en essayant bien sûr d'être le plus rigoureux possible).
9. On considère l'application $\varphi : G \mapsto \{-1, 1\}$ qui associe à tout élément $f \in G$ la valeur 1 si f est une isométrie directe, et la valeur -1 si f est une isométrie indirecte. Vérifier que φ est un morphisme de groupes de $(G, \circ)$ vers $(\{-1, 1\}, \times)$.
10. Quel est le noyau de l'application φ ? Le morphisme φ est-il un isomorphisme ?

Exercice 2

On note (E) l'équation du second degré $z^2 - 2az + b = 0$, dont les coefficients $2a$ et b sont des nombres complexes non nuls. On notera z_1 et z_2 les deux solutions (éventuellement confondues) de l'équation (E) et M_1, M_2 les points du plan complexe d'affixes z_1 et z_2.

1. Rappeler les valeurs de $z_1 + z_2$ et de $z_1 z_2$ en fonction de a et b.
2. Étude d'un cas particulier : dans toute cette question, on suppose que $b = -6 + 8i$.
   (a) Résoudre l'équation (E) dans le cas où $a = 1 + 4i$.
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que M_1 et M_2 soient symétriques par rapport à l'axe imaginaire dans le plan complexe.
   (c) Les points M_1 et M_2 peuvent-ils être symétriques par rapport à l'axe réel avec la valeur imposée pour b ?
   (d) On note A le point du plan complexe d'affixe $2a$. Montrer que le triangle AM_1M_2 est isocèle rectangle en A si et seulement si $z_1 = a(1 + i)$ ou $z_1 = a(1 - i)$.
   (e) Montrer que, dans ces deux cas, $b = 2a^2$, et en déduire les valeurs de a pour lesquelles le triangle AM_1M_2 est effectivement rectangle isocèle en A.
3. On revient désormais au cas général, avec $b \in \mathbb{C}^*$ quelconque. On note $z_1 = r_1 e^{i\alpha}$ et $z_2 = r_2 e^{i\beta}$ les formes exponentielles des deux solutions de (E), en supposant que les arguments α et β sont les arguments principaux de ces solutions.
   (a) Montrer que $z_2 = \overline{z_1}$ si et seulement si a et b sont réels et $a^2 \leqslant b$.
   (b) On souhaite déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $r_1 = r_2$. Calculer les formes exponentielles de a et de b lorsque $r_1 = r_2$, en déduire que dans ce cas $\dfrac{a^2}{b}$ est un nombre réel, et qu'il appartient à l'intervalle $]0, 1]$.
   (c) Montrer réciproquement que, si $\dfrac{a^2}{b} \in]0, 1]$, alors $r_1 = r_2$.
   (d) On souhaite maintenant déterminer à quelle condition sur a et b on aura $\alpha = \beta$. Montrer que, si les deux arguments sont égaux, alors $\dfrac{a^2}{b}$ est un nombre réel, mais qu'il est cette fois-ci supérieur ou égal à 1.
   (e) Montrer réciproquement que, si $\dfrac{a^2}{b} \in [1, +\infty[$, alors $\alpha = \beta$.
   (f) Que se passe-t-il dans le cas où $\dfrac{a^2}{b} = 1$?

Exercice 3

Les trois parties de cet exercice étant largement indépendantes, il est tout à fait possible de commencer par la partie B (dont les premières questions sont peut-être plus abordbales que celles de la partie A).

A. Démonstration du théorème de Cesàro dans le cas monotone.

Soit (u_n) une suite **croissante** convergeant vers une limite $l \in \mathbb{R}$. On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ (autrement dit, v_n est la moyenne des $n+1$ premiers termes de la suite (u_n)).

1. Montrer que la suite (v_n) est majorée par l.
2. Montrer que (v_n) est croissante, en déduire qu'elle converge vers une limite l' vérifiant $l' \leqslant l$.
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $2v_{2n+1} - v_n \geqslant u_n$.
4. En déduire que $l' = l$. Qu'a-t-on démontré dans cette partie ?

B. Une application du théorème de Cesàro.

On étudie dans cette partie une suite (a_n) définie par $a_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{\sqrt{1+a_n}}$.

1. Montrer que la suite (a_n) est bien définie, et à valeurs strictement positives.
2. Montrer que (a_n) est convergente, et déterminer sa limite.
3. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.
4. On définit une suite auxiliaire (b_n) par $b_n = \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}$.
   (a) Vérifier que $b_n = f(a_n)$, en déduire la monotonie de la suite (b_n).
   (b) Montrer que (b_n) converge, et préciser la valeur de sa limite.
5. On pose enfin $c_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} b_k$ (pour tout entier $n \geqslant 1$).
   (a) Exprimer c_n en fonction de n, de a_n et de a_0.
   (b) En exploitant le théorème démontré dans la partie A (qu'on peut bien sûr utiliser même si on n'a pas réussi à traiter entièrement cette partie), montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} n a_n = 2$.

C. Une conséquence de l'application.

On définit dans cette dernière partie une suite (u_n) par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \sqrt{u_n}$.

1. Montrer que (u_n) est bien définie et à valeurs strictement positves.
2. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
3. En exploitant le résultat de la partie B, calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{n^2}$.