

Devoir Surveillé n° 3 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

8 novembre 2025

Exercice 1

1. Il s'agit d'une équation du second ordre à coefficients constants. Commençons par résoudre l'équation caractéristique $r^2 - 2r + 2 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 4 - 8 = -4$, et qui admet donc deux racines complexes $r_1 = \frac{2+2i}{2} = 1+i$ et $r_2 = 1-i$. Les solutions de l'équation homogène associée à l'équation (E) sont donc les fonctions de la forme $y : x \mapsto (A \cos(x) + B \sin(x))e^x$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Il reste à trouver une solution particulière de (E), qu'on va chercher sous la forme $y_p : x \mapsto (ax + b)e^x$ (aucune raison d'augmenter le degré du polynôme en facteur de l'exponentielle ici). On calcule donc $y'_p(x) = (a + ax + b)e^x$, puis $y''_p(x) = (2a + ax + b)e^x$. La fonction y_p est donc solution de (E) si $(2a + ax + b)e^x - (2a + 2ax + 2b)e^x + (2ax + 2b)e^x = xe^x$, soit $(ax + b)e^x = xe^x$. On choisit alors $a = 1$ et $b = 0$, et $y_p : x \mapsto xe^x$ est solution de (E). Il est temps de conclure : les solutions de l'équation (E) sont toutes les fonctions de la forme $y : x \mapsto (A \cos(x) + B \sin(x) + x)e^x$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
2. En reprenant la forme obtenue ci-dessus, la condition $y(0) = 1$ impose $A = 1$. De plus, $y'(x) = (-A \sin(x) + B \cos(x) + 1 + A \cos(x) + B \sin(x) + x)e^x$, donc $y'(0) = -1$ si $B + 1 + A = -1$, soit $B = -2 - A = -3$. Finalement, la solution recherchée a pour expression $y(x) = (\cos(x) - 3 \sin(x))e^x$.
3. On doit déjà avoir $A = 1$ comme expliqué à la question précédente. Mais la deuxième condition $y(\pi) = 1$ impose $(-A + \pi)e^\pi = 1$, donc $A = \pi - e^{-\pi}$, qui n'est pas vraiment égal à 1. Il n'existe donc aucune solution vérifiant les deux conditions imposées.
4. En anticipant le fait qu'on risque de retomber sur l'équation (E), on pose $z(t) = y(x) = y(\ln(t))$, donc $z'(t) = \frac{1}{t}y'(\ln(t))$ et $z''(t) = -\frac{1}{t^2}z'(\ln(t)) + \frac{1}{t^2}z''(\ln(t))$. On remplace dans l'équation (E₁) pour obtenir l'équation équivalente $-y'(\ln(t)) + y''(\ln(t)) - y'(\ln(t)) + 2y(\ln(t)) = t \ln(t)$, soit exactement $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = xe^x$, autrement dit l'équation (E). On sait donc que $y(x) = (A \cos(x) + B \sin(x) + x)e^x$, dont on déduit $z(t) = y(\ln(t)) = (A \cos(\ln(t)) + B \sin(\ln(t))t + \ln(t))t$, avec bien sûr, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2

1. On montre bien sûr les trois propriétés attendues :
 - la relation $\mathcal{R}$ est réflexive, puisque le couple (x, y) vérifie la deuxième possibilité dans la définition de la relation : $x + y = x + y$ et $y \leq y$.
 - supposons qu'on ait à la fois $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$ et $(x', y')\mathcal{R}(x, y)$, alors on ne peut pas avoir $x + y < x' + y'$ ni $x' + y' < x + y$ (sinon, une seule des deux relations est vérifiée). On a donc $x + y = x' + y'$, et à la fois $y \leq y'$ et $y' \leq y$. On en déduit que $y' = y$, puis que $x' = x$, et donc que $(x, y) = (x', y')$, ce qui prouve l'antisymétrie de la relation $\mathcal{R}$.
 - supposons enfin que $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$ et $(x', y')\mathcal{R}(x'', y'')$. On peut affirmer que $x + y \leq x' + y' \leq x'' + y''$. Si l'une de ces deux inégalités est stricte, on aura automatiquement $x + y < x'' + y''$, donc $(x, y)\mathcal{R}(x'', y'')$. Sinon, c'est qu'on est à chaque fois dans le deuxième

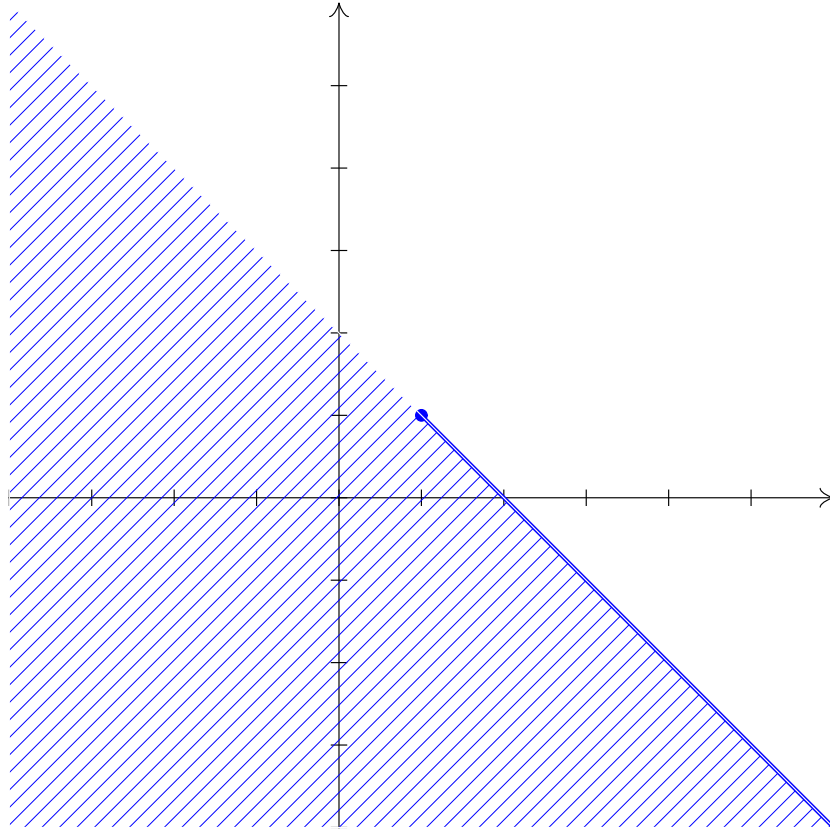
cas de la définition de la relation, et donc que $y \leq y' \leq y''$. On en déduit que $x+y = x''+y''$ et $y \leq y''$, ce qui prouve à nouveau que $(x, y)\mathcal{R}(x'', y'')$, qui est donc vérifiée dans tous les cas. Cela assure la transitivité de la relation $\mathcal{R}$.

La relation est bien totale : si on prend deux couples de réels quelconques (x, y) et (x', y') , soit on a $x + y \neq x' + y'$ et la relation est vérifiée dans un sens ou dans l'autre ; soit les deux sommes sont égales, et on doit alors avoir $y \leq y'$ ou $y' \leq y$, ce qui est toujours vrai.

2. Les éléments de l'axe des abscisses sont de la forme $(x, 0)$, et on a facilement $(x, 0)\mathcal{R}(x', 0) \Leftrightarrow x \leq x'$, donc les éléments sont ordonnés de gauche à droite (comme pour l'ordre naturel donc). De même, les éléments de l'axe des ordonnées sont ordonnés de bas en haut : $(0, y)\mathcal{R}(0, y') \Leftrightarrow y \leq y'$. Par contre, les éléments de la droite d'équation $y = -x$, qui sont donc de la forme $(x, -x)$, ont tous une somme des coordonnées nulle. Ils sont donc ordonnés suivant le critère $(x, -x)\mathcal{R}(x', -x') \Leftrightarrow -x \leq -x' \Leftrightarrow x \geq x'$. Ce sont donc les éléments qui ont l'ordonnée la plus petite qui sont les « plus grands » pour la relation $\mathcal{R}$ (les éléments sont donc classés par ordre croissant de gauche à droite et de haut en bas).
3. L'ensemble A n'est pas majoré : si (x, y) était un majorant de A , on aurait $x \geq 0$ et $y \geq 0$, or $(x+1, y+1) \in A$, et $(x, y)\mathcal{R}(x+1, y+1)$. Il n'admet donc pas de maximum, ni de borne supérieure. Il est par contre minoré par $(0, 0)$ de façon évidente, et $(0, 0)$ appartenant à A , il en est donc le minimum et la borne inférieure.
4. L'ensemble B est un sous-ensemble de A , il admet donc également $(0, 0)$ comme minorant. En fait, tous les éléments de la forme $(x, -x)$ sont aussi des minorants de B puisque tous les couples (x, y) appartenant à B vérifient $x + y > 0$. Supposons qu'il existe un minorant de B vérifiant lui aussi $x + y > 0$, alors l'élément $\left(\frac{x+y}{42}, \frac{x+y}{42}\right)$ (ou simplement $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ si $x+y \geq 42$) est strictement inférieur à (x, y) et appartient à B , ce qui contredit le fait que (x, y) puisse minorer B . Tous les minorants de B vérifient donc $(x, y) \leq 0$ et sont inférieurs ou égaux à un élément de la forme $(x, -x)$, qui minore lui-même B . L'ensemble B n'admet donc pas de minimum puisqu'il ne contient aucun élément de cette forme. En fait, il n'a pas non plus de borne inférieure : si on prend un minorant de la forme $(x, -x)$, il est strictement inférieur à $(x-1, 1-x)$ qui est aussi un minorant de B , ce qui l'empêche d'être borne inférieure. Et s'il est de la forme (x, y) avec $x + y < 0$, il est tout simplement strictement inférieur à $(0, 0)$, lui-même minorant de B .

De façon complètement symétrique, les majorants de B sont tous les couples (x, y) vérifiant $x + y \geq 2$ (par exemple $(1, 1)$ est un majorant de B). L'ensemble B est donc majoré, mais n'a pas de maximum (aucun couple de B ne vérifiant $x + y \geq 2$), ni de borne supérieure : un majorant de la forme $(x, 2-x)$ qui vérifie $x+2-x = 2$ est strictement supérieur à $(x+1, 1-x)$ qui est lui aussi un majorant de B . Et tout autre majorant est strictement plus grand que $(1, 1)$.

5. Les minorants du couple $(1, 1)$ sont tous les couples (x, y) vérifiant au choix $x + y < 2$ (ce qui signifie que le point de coordonnées (x, y) est situé strictement en-dessous de la droite $y = 2 - x$), ou $x + y = 2$ mais $y \leq 1$, ce qui correspond aux points de cette même droite situés « à droite » du point $(1, 1)$. Bref, on a un demi-plan avec « la moitié » de la droite le délimitant.



6. Le cercle trigonométrique contient des couples pour lesquels $-2 \leq x + y \leq 2$ de façon évidente, donc il est majoré par exemple par $(42, 42)$ et minoré par $(-42, -42)$. S'il admet un maximum, il s'agit d'un point (x, y) pour lequel $x + y$ est maximal, ce qui revient à chercher pour quels angles la valeur de $\cos(t) + \sin(t)$ est maximale (en restreignant t à l'intervalle $[0, 2\pi]$). On pose donc $f(t) = \cos(t) + \sin(t)$, f est dérivable et $f'(t) = -\sin(t) + \cos(t)$, qui s'annule pour $t = \frac{\pi}{4}$ et $t = \frac{5\pi}{4}$. La fonction f est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et sur $\left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$, et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$. Elle admet en particulier un maximum strict en $t = \frac{\pi}{4}$, ce qui prouve que le point $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ est le maximum du cercle trigonométrique pour la relation $\mathcal{R}$. De façon complètement symétrique, le cercle a aussi un minimum, qui est le point $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Exercice 3

1. Au choix : « parce qu'on écoute de toute façon tellement peu en cours qu'on ne maîtrise pas les méthodes en question », ou plus sérieusement, parce que l'équation n'est pas linéaire à cause du terme y^{1-m} .
2. Si $z(x) = y(x)^{1-m}$, alors $y(x) = z(x)^{\frac{1}{1-m}}$ (puisque tout est strictement positif par hypothèse, pas de question à se poser sur la définition de ces puissances), donc $y'(x) = \frac{1}{1-m} z'(x) z(x)^{\frac{1}{1-m}-1} = \frac{z'(x) z(x)^{\frac{m}{1-m}}}{1-m}$. Si on reporte dans l'équation initiale, elle est donc équivalente à $\frac{z'(x) z(x)^{\frac{m}{1-m}}}{1-m} + a(x) z^{\frac{1}{1-m}} = b(x) z^{\frac{m}{1-m}}$. En factorisant par $z^{\frac{m}{1-m}}$ qui ne s'annule jamais, on retombe sur

$\frac{1}{1-m}z' + a(x)z = b(x)$ (puisque $\frac{1}{1-m} - \frac{m}{1-m} = 1$), ce qui est bien une équation linéaire du premier ordre. On a procédé par équivalences, pas besoin de vérifier la réciproque.

3. Refaisons les calculs dans ce cas précis, ce sera plus lisible. On pose donc $z(x) = \frac{1}{y(x)}$, ou plutôt $y(x) = \frac{1}{z(x)}$. On en déduit que $y'(x) = -\frac{z'(x)}{z(x)^2}$. En remplaçant dans l'équation (E), on trouve alors $-\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{xz} = -\frac{1}{x^2z^2}$, soit en multipliant tout par $-z^2$ (autant se débarrasser des signes $-$) l'équation équivalente $z' + \frac{1}{x}z = \frac{1}{x^2}$. Il s'agit d'une équation linéaire du premier ordre. Les solutions de l'équation homogène associée s'obtiennent sans difficulté, il s'agit des fonctions de la forme $z_h : x \mapsto Ke^{-\ln(x)} = \frac{K}{x}$, avec $K \in \mathbb{R}$. On va chercher une solution particulière z_p par la méthode de variation de la constante, en posant donc $z_p(x) = \frac{K(x)}{x}$, d'où $z'_p(x) = \frac{xK'(x) - K(x)}{x^2}$. En reportant dans l'équation, z_p est solution si $\frac{K'(x)}{x} - \frac{K(x)}{x^2} + \frac{K(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2}$, soit $K'(x) = \frac{1}{x}$. On peut donc choisir $K(x) = \ln(x)$, ce qui nous donne $z_p(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions z définies par $z(x) = \frac{x}{\ln(x) + K}$, avec $K \in \mathbb{R}$. Attention tout de même, on ne veut que des solutions strictement positives, et les fonctions obtenues ne le sont jamais sur tout l'intervalle $]0, +\infty[$. Pas grave, elles ne seront donc solutions que sur des intervalles de la forme $]e^K, +\infty[$, où on aura alors $y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{x}{\ln(x) + K}$.

4. (a) Avec les notations de l'énoncé, $y = z + y_0$, donc y est solution de (E) si $z' + y'_0 = p(z + y_0)^2 + q(z + y_0) + r = pz^2 + 2py_0z + py_0^2 + qz + qy_0 + r$. Or, par hypothèse, $y'_0 = py_0^2 + qy_0 + r$, on peut donc simplifier l'équation pour ne garder que $z' = pz^2 + (2py_0 + q)z$, qui est bien une équation de Bernoulli avec $m = 2$.
- (b) En fait, il suffit de poser $y(x) = x^2$, donc $y' = 2x$. On remplace dans l'équation : $(1 - x^3) \times 2x + x^2 \times x^2 + (x^2)^2 - 2x = 2x - 2x^4 + x^4 + x^4 - 2x = 0$, donc ça marche.
- (c) On pose donc $z(x) = y(x) - x^2$, ou plutôt $y(x) = z(x) + x^2$, ce qui donne $y'(x) = z'(x) + 2x$, puis l'équation $(1 - x^3)(z' + 2x) + x^2(z + x^2) + (z + x^2)^2 - 2x = 0$, soit $(1 - x^3)z' + x^2z + z^2 + 2x^2z = 0$ (tout le reste se simplifiant comme prévu). Il nous reste donc à résoudre l'équation de Bernoulli $(1 - x^3)z' + 3x^2z = -z^2$. Pour cela, on effectue un nouveau changement d'inconnue en posant $w = \frac{1}{z}$, donc $z = \frac{1}{w}$, ce qui donne $z' = -\frac{w'}{w^2}$, puis l'équation équivalente $\frac{(x^3 - 1)w'}{w^2} + \frac{3x^2}{w} = -\frac{1}{w^2}$. On multiplie par w^2 et on divise par $x^3 - 1$ pour trouver enfin une équation qu'on sait résoudre : $w' + \frac{3x^2}{x^3 - 1}w = -\frac{1}{x^3 - 1}$. Les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme $x \mapsto Ke^{-\ln(x^3 - 1)}$ (on reconnaît un coefficient de la forme $\frac{u'}{u}$ devant w), donc $w_h(x) = \frac{K}{x^3 - 1}$, avec $K \in \mathbb{R}$. Cherchons une solution particulière sous la forme $w_p(x) = \frac{K(x)}{x^3 - 1}$ (variation de la constante), donc $w'_p(x) = \frac{K'(x)(x^3 - 1) - 3x^2K(x)}{(x^3 - 1)^2}$. En reportant dans l'équation, w_p en est solution si $\frac{K'(x)}{x^3 - 1} - \frac{3x^2K(x)}{(x^3 - 1)^2} + \frac{3x^2K(x)}{(x^3 - 1)^2} = -\frac{1}{x^3 - 1}$, donc simplement si $K'(x) = -1$. On s'empresse de prendre $K(x) = -x$, nos fonctions w solutions de l'équation complète sont donc de la forme $w : x \mapsto \frac{K - x}{x^3 - 1}$. En supposant qu'on effectue la résolution sur l'intervalle $]1, +\infty[$

(la valeur 1 est de toute façon valeur interdite après normalisation de l'équation initiale), ces fonctions sont strictement positives sur l'intervalle $]1, K[$ (ce qui suppose un choix de K strictement supérieur à 1). Il ne reste ensuite plus qu'à remonter les changements d'inconnue : $z(x) = \frac{1}{w(x)} = \frac{x^3 - 1}{K - x}$, puis $y(x) = z(x) + x^2 = \frac{x^3 - 1}{K - x}$, solution valable sur $]1, K[$, avec $K > 1$.

Problème

1. (a) Puisque $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos(x) \leq 1$, on a donc $5 - 4\cos(x) \geq 1 > 0$, ce qui assure que f est toujours définie, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Par ailleurs, f est une fonction 2π -périodique, et elle est impaire puisque son numérateur est impair et son dénominateur pair. Il suffit donc de l'étudier sur une demi-période, par exemple sur $I = [0, \pi]$, pour en déduire l'intégralité de la courbe.

- (b) Calculons $f(x) - \sin(x) = \sin(x) \left(\frac{1}{\sqrt{5 - 4\cos(x)}} - 1 \right) = f(x)(1 - \sqrt{5 - 4\cos(x)})$. Sur l'intervalle I , $\sin(x) \geq 0$ donc $f(x) \geq 0$ et $f(x) - \sin(x)$ est du signe de $1 - \sqrt{5 - 4\cos(x)} = \frac{1 - (5 - 4\cos(x))}{1 + \sqrt{5 - 4\cos(x)}} = \frac{4(\cos(x) - 1)}{1 + \sqrt{5 - 4\cos(x)}} \leq 0$ puisque $\cos(x) \leq 1$ (on a multiplié par la quantité conjuguée en cours de route). On a donc prouvé que $f(x) - \sin(x) \leq 0$ sur tout l'intervalle I .

- (c) Le plus simple est de poser $w(x) = x - \sin(x)$ et de constater que la fonction w est dérivable sur I , de dérivée $w'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$. La fonction w est strictement croissante sur I et vérifie $w(0) = 0$, donc elle est bien strictement positive sur $]0, \pi]$, ce qui prouve que $\sin(x) < x$.

- (d) D'après les deux questions précédentes, $f(x) \leq \sin(x) < x$ sur $]0, \pi]$, donc l'équation ne peut pas avoir de solution sur cet intervalle. Par imparité de f , elle n'en a pas non plus sur $[-\pi, 0[$. La seule solution de l'équation $f(x) = x$ sur I est donc $x = 0$ (qui est solution évidente). L'énoncé ne précisait pas s'il fallait résoudre sur $\mathbb{R}$, mais pour le faire, il faut exploiter la périodicité de f et ses variations sur I (qu'on va étudier après...) qui prouvent que f ne prend jamais de valeur supérieure à π en valeur absolue, et ne peut donc pas produire de solution à l'équation en-dehors de I .

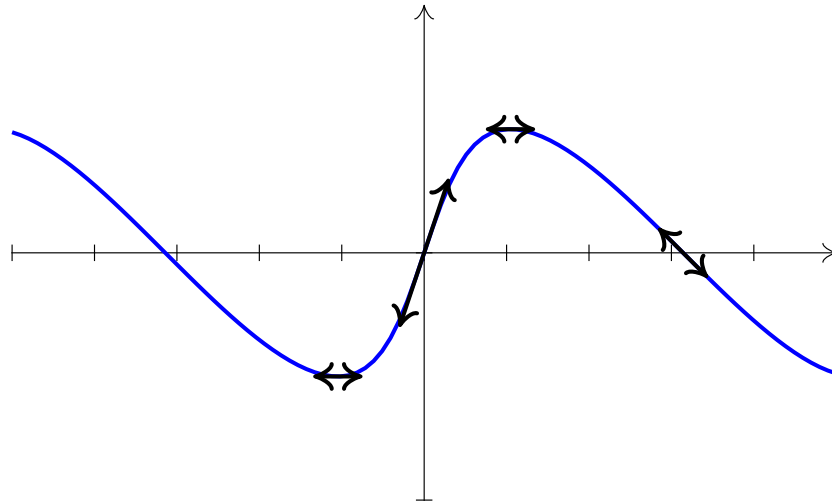
- (e) Il est temps de dériver notre fonction : $f'(x) = \frac{\cos(x)\sqrt{5 - 4\cos(x)} - \sin(x) \times \frac{4\sin(x)}{2\sqrt{5 - 4\cos(x)}}}{5 - 4\cos(x)} = \frac{\cos(x)(5 - 4\cos(x)) - 2\sin^2(x)}{(5 - 4\cos(x))^{\frac{3}{2}}} = \frac{5\cos(x) - 4\cos^2(x) - 2(1 - \cos^2(x))}{(5 - 4\cos(x))^{\frac{3}{2}}} = \frac{-2 + 5\cos(x) - 2\cos^2(x)}{(5 - 4\cos(x))^{\frac{3}{2}}}$.

Cette dérivée est du signe de $-2 + 5\cos(x) - 2\cos^2(x)$. On pose $X = \cos(x)$ et on étudie le signe du trinôme $-2 + 5X - 2X^2$, qui a pour discriminant $\Delta = 25 - 16 = 9$ et pour racines $X_1 = \frac{-5 - 3}{-4} = 2$ (valeur impossible pour un cosinus), et $X_2 = \frac{-5 + 3}{-4} = \frac{1}{2}$, valeur qui correspond à $x = \frac{\pi}{3}$ (unique valeur annulant la dérivée sur l'intervalle I). Avant de dresser

le tableau de variations, on calcule $f(0) = f(\pi) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{5 - 2}} = \frac{1}{2}$. On peut résumer notre étude dans le tableau suivant (j'ai mis une période complète en exploitant la parité) :

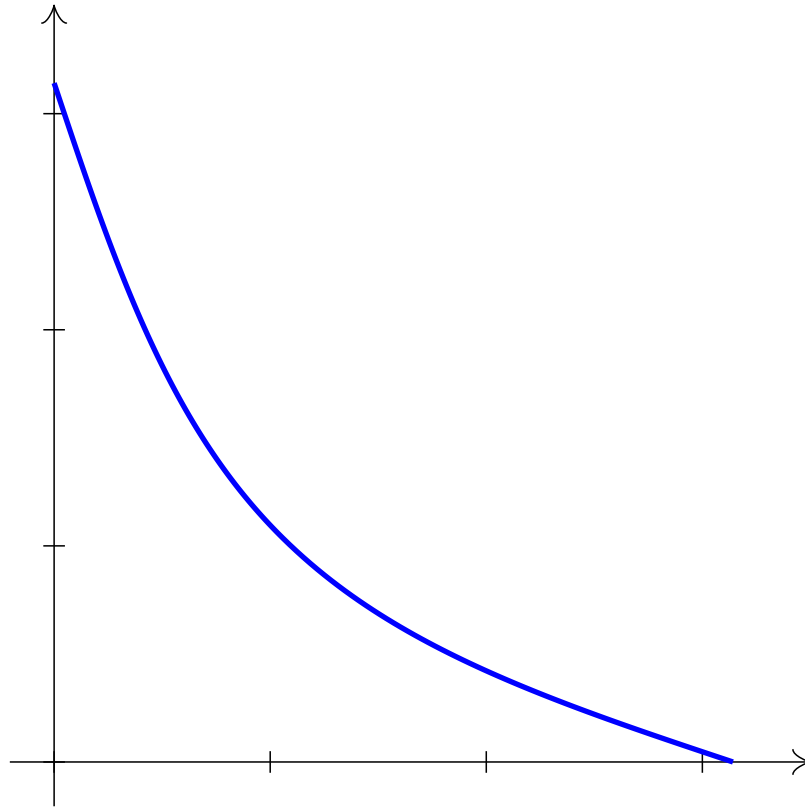
x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	π
f	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0

Pour le tracé de courbe, on ajoute le fait que $f'(0) = \frac{-2+5-2}{(5-4)^{\frac{3}{2}}} = 1$, donc la tangente à notre courbe en 0 aura pour équation $y = x$. En π , on calcule de même $f'(\pi) = \frac{-2-5-2}{(5+4)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{3}$, et la tangente correspondante a pour équation $y = -\frac{1}{3}(x-\pi) = \frac{\pi}{3} - \frac{x}{3}$. En exploitant parité et périodicité, on obtient une courbe ressemblant à ceci :



2. (a) La fonction est bien définie sur $[-1, 1]$ (son dénominateur y est minoré par 1 donc ne s'annule pas), elle y est aussi dérivable, et $\varphi'(t) = \frac{-5(5-4t) + 4(4-5t)}{(5-4t)^2} = \frac{-9}{(5-4t)^2} < 0$, donc φ est décroissante sur $[-1, 1]$. Calculons en passant $\varphi(-1) = \frac{9}{9} = 1$ et $\varphi(1) = \frac{-1}{1} = -1$, ça pourrait servir.
- (b) Par définition, $g(x) = \arccos(\varphi(\cos(x)))$. Comme $\cos(x) \in [-1, 1]$ et qu'on vient de prouver que φ était bijective de $[-1, 1]$ vers lui-même, l'expression à l'intérieur de l'arccos est toujours comprise entre -1 et 1 , ce qui prouve que g est même définie sur $\mathbb{R}$ (et a fortiori sur $[0, \pi]$). Elle ne sera par contre pas dérivable quand $\varphi(\cos(x)) = \pm 1$, donc quand $\cos(x) = \pm 1$ en reprenant l'étude de la question précédente. Sur l'intervalle I , ce ne sera le cas que pour $x = 0$ et $x = \pi$, donc g est dérivable sur $]0, \pi[$. De plus, en posant $z(x) = \varphi(\cos(x))$, $z'(x) = -\sin(x)\varphi'(\cos(x)) = \frac{9\sin(x)}{(5-4\cos(x))^2}$. Ensuite, $g'(x) = -\frac{z'(x)}{\sqrt{1-z^2(x)}} = -\frac{9\sin(x)}{(5-4\cos(x))^2} \times \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(4-5\cos(x))^2}{(5-4\cos(x))^2}}} = -\frac{9\sin(x)}{(5-4\cos(x))\sqrt{(5-4\cos(x))^2 - (4-5\cos(x))^2}} = -\frac{9\sin(x)}{(5-4\cos(x))\sqrt{9-9\cos^2(x)}}$. Or $\sqrt{9-9\cos^2(x)} = 3\sqrt{1-\cos^2(x)} = 3\sqrt{\sin^2(x)} = 3\sin(x)$ puisque $\sin(x) \geq 0$ sur l'intervalle I . Finalement, cette horrible dérivée ne se simplifie pas si mal, et $g'(x) = -\frac{3}{5-4\cos(x)}$.
- (c) La dérivée calculée à la question précédente est toujours négative, donc g est strictement décroissante sur $[0, \pi]$ (le fait que g ne soit pas dérivable en 0 et en π est accessoire ici).

Faire un tableau de variations n'a donc aucun intérêt, contentons-nous d'ajouter les valeurs $g(0) = \arccos(-1) = \pi$ et $g(\pi) = \arccos(1) = 0$, et proposons l'allure de courbe suivante :



- (d) Bien sûr que non, une fois qu'on sait que φ est décroissante sur $[-1, 1]$, comme la fonction $\cos$ est décroissante sur I et à valeurs dans $[-1, 1]$, on en déduit que $z = \varphi \circ \cos$ est croissante sur I . Comme on compose à nouveau par une fonction décroissante (la fonction $\arccos$) pour obtenir la fonction g , cette dernière est donc elle-même décroissante comme composée de trois fonctions décroissantes.
3. (a) L'étude des variations de f (qui est bien entendu une fonction continue) montre qu'elle est bijective de $\left[0, \frac{\pi}{3}\right[$ vers $\left[0, \frac{1}{2}\right[$, puis à nouveau bijective de $\left]\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ vers ce même intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, ce qui prouve l'existence des deux antécédents demandés, dans les bons intervalles.
- (b) La première simplification est claire : $\cos(g(x)) = \frac{4 - 5\cos(x)}{5 - 4\cos(x)}$. On en déduit $\sin^2(g(x)) = 1 - \cos^2(g(x)) = 1 - \frac{(4 - 5\cos(x))^2}{(5 - 4\cos(x))^2} = \frac{9\sin^2(x)}{(5 - 4\cos(x))^2}$ (la simplification du numérateur a déjà été faite en question 2.b). Comme tout est positif sur l'intervalle I (y compris $\sin(g(x))$) puisque $g(x) \in [0, \pi]$ au vu de l'étude de la fonction effectuée plus haut), on peut en déduire que $\sin(g(x)) = \frac{3\sin(x)}{5 - 4\cos(x)}$. Dernier calcul demandé : $f(g(x)) = \frac{\sin(g(x))}{\sqrt{5 - 4\cos(g(x))}} = \frac{3\sin(x)}{5 - 4\cos(x)} \times \frac{1}{\sqrt{5 - 4 \times \frac{4 - 5\cos(x)}{5 - 4\cos(x)}}} = \frac{3\sin(x)}{\sqrt{5 - 4\cos(x)} \sqrt{25 - 20\cos(x) - 16 + 20\cos(x)}} = \frac{\sin(x)}{\sqrt{5 - 4\cos(x)}}$. Autrement dit, $f(g(x)) = f(x)$.
- (c) Le calcul précédent montre que $g(x_1)$ a la même image que x_1 par la fonction f , donc

que $g(x_1) = x_1$ ou $g(x_1) = x_2$ (ce sont les deux seuls antécédents possibles). Or, si $x_1 \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, la décroissance de la fonction g assure que $g(x_1) > g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \arccos\left(\frac{4 - \frac{5}{2}}{5 - \frac{4}{2}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$, ce qui permet de conclure que $g(x_1) = x_2$.

4. (a) On l'a déjà fait plus haut. Puisque f est croissante sur cet intervalle, à valeurs dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, le théorème de la bijection assure qu'on aura le tableau de variations suivant pour la réciproque h :

x	0	$\frac{1}{2}$
h		$\frac{\pi}{3}$
	0	

- (b) Puisque $x_2 = g(x_1)$, on peut calculer $\cos(x_1 + x_2) = \cos(x_1)\cos(g(x_1)) - \sin(x_1)\sin(g(x_1)) = \cos(x_1) \times \frac{4 - 5\cos(x_1)}{5 - 4\cos(x_1)} - \sin(x_1) \times \frac{3\sin(x_1)}{5 - 4\cos(x_1)} = \frac{4\cos(x_1) - 5\cos^2(x_1) - 3\sin^2(x_1)}{5 - 4\cos(x_1)} = \frac{-3 + 4\cos(x_1) - 2\cos^2(x_1)}{5 - 4\cos(x_1)}$ en exploitant bien sûr $\sin^2 = 1 - \cos^2$ pour la fin du calcul. De

même, $\cos(x_1 - x_2) = \cos(x_1)\cos(g(x_1)) + \sin(x_1)\sin(g(x_2)) = \frac{3 + 4\cos(x_1) - 8\cos^2(x_1)}{5 - 4\cos(x_1)}$.

- (c) La fonction $t \mapsto t - g(t)$ est trivialement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ comme différence d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante. La fonction $t \mapsto t + g(t)$ a une dérivée d'expression $1 - \frac{3}{5 - 4\cos(x)} = \frac{2 - 4\cos(x)}{5 - 4\cos(x)}$, qui est négative sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ puisque $\cos(x) \geq \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ sur cet intervalle, donc $2 - 4\cos(x)$ y est négatif. Cette fonction est donc décroissante.

- (d) D'après la question précédente, $x_1 + x_2 = x_1 + g(x_1)$ se situe entre $\frac{\pi}{3} + g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$, et $0 + g(0) = \pi$, donc $\frac{x_1 + x_2}{2} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, ce qui assure que son cosinus est positif. De même $x_1 - x_2$ est compris entre $0 - g(0) = -\pi$ et $\frac{\pi}{3} - g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$, donc $\frac{x_1 - x_2}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, et on a à nouveau un cosinus positif.

- (e) D'après les formules de duplication, $\cos^2\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{1 + \cos(x_1 + x_2)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{-3 + 4\cos(x_1) - 2\cos^2(x_1)}{2(5 - 4\cos(x_1))} = \frac{2 - 2\cos^2(x_1)}{2(5 - 4\cos(x_1))} = \frac{\sin^2(x_1)}{5 - 4\cos(x_1)}$, donc (tout étant positif), $\cos\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{\sin(x_1)}{\sqrt{5 - 4\cos(x_1)}} = f(x_1)$. De même, $\cos^2\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3 + 4\cos(x_1) - 8\cos^2(x_1)}{2(5 - 4\cos(x_1))} = \frac{8 - 8\cos^2(x_1)}{2(5 - 4\cos(x_1))} = \frac{4\sin^2(x_1)}{5 - 4\cos(x_1)}$, donc $\cos\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) = -\frac{2\sin(x_1)}{\sqrt{5 - 4\cos(x_1)}} = -2f(x_1)$ (attention, ici, le sinus est négatif, d'où la nécessité de faire apparaître un signe $-$).

- (f) Il faut faire attention aux intervalles pour simplifier les expressions. On peut écrire que $\frac{x_1 + x_2}{2} = \arccos\left(\cos\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right)$ car $\frac{x_1 + x_2}{2} \in [0, \pi]$, mais $\frac{x_1 - x_2}{2} = -\arccos\left(\cos\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)\right)$ car $\frac{x_1 - x_2}{2} \in [-\pi, 0]$. Ensuite, on en déduit $x_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_1 - x_2}{2} = \arccos\left(\cos\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right) -$

$\arccos\left(-\cos\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)\right) = \arccos(f(x_1)) - \arccos(-2f(x_1))$. Or, en posant $y = f(x_1)$,
 par définition, on aura $x_1 = h(y)$, donc on obtient l'expression $h(y) = \arccos(y) - \arccos(2y)$.