Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 3

MPSI Lycée Camille Jullian

8 novembre 2025

Exercice 1

On considère dans cet exercice l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + 2y = xe^x$.

1. Résoudre complètement l'équation (E).
2. Déterminer l'unique solution de l'équation (E) vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$.
3. Existe-t-il une solution de (E) vérifiant $y(0) = y(\pi) = 1$? Si oui, cette solution est-elle unique ?
4. Résoudre l'équation différentielle (E_1) : $t^2 z''(t) - tz'(t) + 2z(t) = t\ln(t)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ en effectuant le changement de variable $x = \ln(t)$ (si vous ne voyez aucun rapport avec ce qui précède, ce n'est pas normal).

Exercice 2

On considère dans cet exercice la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$ si $x + y < x' + y'$ **ou** $(x + y = x' + y'$ et $y \leqslant y')$. On pourra faire des dessins pour illustrer les résultats de certaines questions.

1. Montrer rigoureusement que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$. S'agit-il d'un ordre total ?
2. Comment sont ordonnés les éléments de l'axe des abscisses par la relation $\mathcal{R}$? Et ceux de l'axe des ordonnées ? Et ceux de la droite d'équation $y = -x$?
3. L'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0\}$ est-il minoré pour $\mathcal{R}$? Majoré ? Admet-il un minimum, un maximum, une borne inférieure, une borne supérieure ?
4. Mêmes questions pour l'ensemble $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in]0, 1[\text{ et } y \in]0, 1[\}$.
5. Représenter graphiquement l'ensemble de tous les minorants du couple $(1, 1)$ pour la relation $\mathcal{R}$ (en justifiant, bien entendu).
6. Le cercle trigonométrique d'équation $x^2 + y^2 = 1$ est-il minoré, majoré pour la relation $\mathcal{R}$? Admet-il un maximum et un minimum ?

Exercice 3

Une équation différentielle de Bernoulli est une équation de la forme $y' + a(x)y = b(x)y^m$, avec $m \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$. Quand on cherche à résoudre une telle équation, on n'en recherche que les solutions strictement positives.

1. Pourquoi ne peut-on pas résoudre une équation de ce genre par les méthodes vues en cours ?
2. En posant $z(x) = y(x)^{1-m}$, montrer que la fonction y est solution de l'équation $y' + a(x)y = b(x)y^m$ si et seulement si z est solution d'une équation linéaire d'ordre 1 à préciser.
3. Utiliser le changement de fonction inconnue précédent pour résoudre l'équation de Bernoulli $y' - \dfrac{1}{x}y = -\dfrac{1}{x^2}y^2$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
4. Une équation de Ricatti est une équation de la forme (E) : $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$, où p, q et r sont trois fonctions continues.

(a) Montrer que, si y_0 est une solution particulière de (E), en posant $z = y - y_0$, y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation de Bernoulli.

(b) Déterminer une solution particulière évidente de l'équation $(1 - x^3)y' + x^2 y + y^2 - 2x = 0$ (si on n'est pas inspiré, on cherchera une fonction polynômiale de degré 2).

(c) Résoudre complètement l'équation de la question précédente en effectuant le changement d'inconnue suggéré en question a.

Problème

On s'intéresse dans cet exercice à la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{5 - 4\cos(x)}}$, ainsi qu'à la fonction $g : x \mapsto \arccos\left(\dfrac{4 - 5\cos(x)}{5 - 4\cos(x)}\right)$. Cette dernière sera définie uniquement sur l'intervalle $I = [0, \pi]$.

1. Étude de la fonction f.
   (a) Préciser le domaine de définition de f, et justifier que l'intervalle I est un intervalle d'étude intelligent pour cette fonction.
   (b) Étudier le signe de $f(x) - \sin(x)$ sur l'intervalle I.
   (c) Montrer que, $\forall x \in]0, \pi]$, $\sin(x) < x$.
   (d) En déduire les solutions de l'équation $f(x) = x$.
   (e) Étudier les variations sur I de la fonction f, puis tracer une allure de sa courbe représentative (on indiquera notamment sur la courbe les tangentes à la courbe en ses points d'abscisses 0 et π).
2. Étude de la fonction g.
   (a) Étudier les variations de la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{4 - 5t}{5 - 4t}$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.
   (b) En déduire que g est définie sur I, calculer sa dérivée là où c'est possible (domaine de dérivabilité à préciser avant de faire le calcul).
   (c) Dresser le tableau de variations de g, et tracer une allure rapide de sa courbe.
   (d) Le calcul de g' était-il nécessaire à l'obtention des variations de la fonction g ?
3. Lien entre les fonctions f et g.
   (a) Soit $y \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[$, justifier que y admet deux antécédents par f dans l'intervalle I, l'un appartenant à l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right[$ (on le notera x_1) et l'autre à $\left]\dfrac{\pi}{3}, \pi\right]$ (on le notera x_2).
   (b) Simplifier l'expresion de $\cos(g(x))$ et de $\sin(g(x))$ lorsque $x \in I$, puis calculer $f(g(x))$.
   (c) En déduire que $x_2 = g(x_1)$.
4. Calcul de la réciproque de f.
   (a) Justifier que la restriction de f à l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$ est bijective. On notera h la réciproque de cette restriction. Donner le tableau de variations de la fonction h.
   (b) En reprenant les notations (et le résultat final, même si on n'a pas réussi à le démontrer) de la question 3), exprimer $\cos(x_1 + x_2)$ et $\cos(x_1 - x_2)$ comme des fractions ne faisant intervenir que $\cos(x_1)$.
   (c) Étudier les variations des fonctions $t \mapsto t + g(t)$ et $t \mapsto t - g(t)$ sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$.
   (d) En déduire les signes de $\cos\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{x_1 - x_2}{2}\right)$.
   (e) Exprimer ces deux cosinus en fonction de $f(x_1)$ (les élever au carré pourrait être une bonne idée).
   (f) À l'aide des questions précédentes, déterminer une expression explicite (la plus simple possible) de la fonction h.