Devoir Surveillé n$^{\mathrm{o}}$ 2 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

4 octobre 2025

Exercice 1

1. Commençons prudemment par définir un domaine de résolution : pour que l'équation ait un sens, il faut avoir $3x - 5 \geqslant 0$, donc $x \geqslant \frac{5}{3}$, et $x(x-3) \geqslant 0$, ce qui sera toujours le cas quand $x \geqslant 3$ (et aussi quand $x \leqslant 0$ mais cette possibilité a déjà été éliminée). Sous cette condition, on peut élever au carré pour trouver l'équation équivalente $x^2 - 3x = 3x - 5$, donc $x^2 - 6x + 5 = 0$, trinôme qui a pour discriminant $\Delta = 36 - 20 = 16$, et pour racines $x_1 = \frac{6-4}{2} = 1$ (qu'on pouvait aussi trouver comme racine évidente), et $x_2 = \frac{6+4}{2} = 5$. La première solution n'étant pas valide, on conserve seulement $\mathcal{S} = \{5\}$.
2. Il y a juste deux cas à distinguer. Première possibilité : $x + \frac{1}{x} > 3$, donc $\frac{x^2 - 3x + 1}{x} > 0$. Le trinôme du numérateur a pour discriminant $\Delta = 9 - 4 = 5$ et pour racines $x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Les deux racines étant positives, le trinôme est toujours strictement positif sur $]-\infty, 0[$, ce qui empêche d'avoir des solutions à notre inéquation sur cet intervalle (le x du dénominateur y étant évidemment négatif). Autrement dit, on conserve pour ce premier cas $\mathcal{S}_1 =]0, x_1[\cup]x_2, +\infty[$. Le deuxième cas à traiter est $x + \frac{1}{x} < -3$, qui est équivalente à $\frac{x^2 + 3x + 1}{x} < 0$. Le numérateur a le même discriminant que celui étudié plus haut, mais des racines opposées, donc strictement négatives toutes les deux. Cette fois-ci c'est sur $]0, +\infty[$ qu'on ne peut pas avoir de solutions, et on conserve de l'autre côté l'ensemble $\mathcal{S}_2 =]-\infty, -x_2[\cup]-x_1, 0[$ (il est normal d'obtenir une solution complèrement symétrique de $\mathcal{S}_1$, puisque le membre de gauche de l'inéquation de départ est pair). Finalement, $\mathcal{S} = \left]-\infty, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{5}-3}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$.
3. Le plus simple est de commencer par regrouper les puissances de 2 d'un côté, et celles de 3 de l'autre, pour pouvoir factoriser : $3^{x+1} - 3^x = 2^x - 2^{x-2}$, donc $3^x(3-1) = 2^x\left(1 - \frac{1}{4}\right)$, soit $8 \times 3^x = 3 \times 2^x$. Il est temps de mettre des ln sur tout ça (tout étant strictement positif, ça ne peut pas poser de problème) : $\ln(8) + x\ln(3) = \ln(3) + x\ln(2)$, donc $x(\ln(3) - \ln(2)) = \ln(3) - 3\ln(2)$, donc on déduit directement $\mathcal{S} = \left\{\frac{\ln(3) - 3\ln(2)}{\ln(3) - \ln(2)}\right\}$.
4. On commence par poser $X = e^x$, en multipliant au passage tout par e^x : $4X^3 - 7X - 3 = 0$. Cette équation du troisième degré a pour racine évidente $X = -1$ (puisque $-4 + 7 - 3 = 0$), on peut donc factoriser son membre de gauche sous la forme $4X^3 - 7X - 3 = (X+1)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b+a)X^2 + (c+b)X + c$. Une classique identication des coefficients impose alors $a = 4$, $b + a = 0$ donc $b = -4$, puis $c + b = -7$ donc $c = -3$, ce qui est cohérent avec la dernière équation. Le deuxième facteur obtenu est donc $4X^2 - 4X - 3$, il a pour discriminant $\Delta = 16 + 48 = 64$ et admet donc deux racines réelles, $X_1 = \frac{4-8}{8} = -\frac{1}{2}$, et

$X_2 = \dfrac{4+8}{8} = \dfrac{3}{2}$. Parmi les trois racines obtenues, une seule est positive et donc cohérente avec le changement de variable posé. On a donc nécessairement $x = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) = \ln(3) - \ln(2)$. Conclusion : $\mathcal{S} = \{\ln(3) - \ln(2)\}$.

5. On va bien sûr faire un joli tableau, en notant $S = |x-1| + |x^2-4| - |x+3| - 2$. Les valeurs d'annulation étant ici complètement triviales, je ne détaille rien :

x	$-\infty$		-3		-2		1		2		$+\infty$
$\lvert x-1\rvert$		$1-x$		$1-x$		$1-x$	0	$x-1$		$x-1$	
$\lvert x^2-4\rvert$		x^2-4		x^2-4	0	$4-x^2$		$4-x^2$	0	x^2-4	
$\lvert x+3\rvert$		$-x-3$	0	$x+3$		$x+3$		$x+3$		$x+3$	
S		x^2-2		x^2-2x-8		$-x^2-2x$		$-x^2-2$		x^2-10	

Il reste évidemment à résoudre l'inéquation $S \leqslant 0$ sur chacun des cinq intervalles :

- sur $]-\infty, -3]$, $x^2 \leqslant 2$ n'est jamais vérifié, donc $\mathcal{S}_1 = \emptyset$.
- sur $[-3, -2]$, le trinôme $x^2 - 2x - 8$ a pour discriminant $\Delta = 4 + 32 = 36$ et pour racines $x_1 = \dfrac{2-6}{2} = -2$ et $x_2 = \dfrac{2+6}{2} = 4$. Il est négatif entre ces racines, ce qui laisse curieusement une unique valeur possible sur notre intervalle : $\mathcal{S}_2 = \{-2\}$.
- sur $[-2, 1]$, $-x^2 - 2x = -x(x+2)$ est négatif à l'extérieur de ses racines -2 et 0, donc $\mathcal{S}_3 = [0, 1]$ (auquel je ne rajoute pas la valeur -2 déjà obtenue sur l'intervalle précédent).
- sur $[1, 2]$, tout comme sur $\mathbb{R}$ tout entier, $-x^2 - 2 \leqslant 0$ est toujours vérifié, donc $\mathcal{S}_4 = [1, 2]$.
- enfin, sur $[2, +\infty[$, $x^2 \leqslant 10$ si $x \in \mathcal{S}_5 = [2, \sqrt{10}]$.

Il est (enfin) temps de conclure en regroupant toutes les solutions obtenues : $\mathcal{S} = \{-2\} \cup [0, \sqrt{10}]$.

6.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sqrt{27}$	42	500
$\log(x)$	0	0.30	0.48	0.60	0.70	0.78	0.85	0.90	0.96	1	0.72	1.63	2.70

Justifications (on rappelle que les règles de calculs sont exactement les mêmes que pour le logarithme népérien) : $\log(1) = 0$ comme pour tout logarithme qui se respecte ; $\log(4) = 2\log(2) = 2 \times 0.30 = 0.60$; $\log(5) = \log(10) - \log(2) = 1 - 0.30 = 0.70$; $\log(6) = \log(3) + \log(2) = 0.78$; $\log(8) = 3\log(2) = 3 \times 0.30 = 0.90$; $\log(9) = 2\log(3) = 2 \times 0.48 = 0.96$; $\log(10) = 1$ puisqu'il s'agit du log décimal ; $\log(\sqrt{27}) = \dfrac{1}{2}\log(3^3) = \dfrac{3}{2}\log(3) = \dfrac{3}{2} \times 0.48 = 0.72$ (le piège était de placer $\sqrt{27}$ à cet endroit dans la liste, puisque ce nombre est compris entre 5 et 6, ce qui rend la valeur obtenue tout à fait cohérente) ; $\log(42) = \log(6) + \log(7) = 0.78 + 0.85 = 1.63$; $\log(500) = \log(5) + \log(100) = 0.70 + 2 = 2.70$.

Exercice 2

1. (a) La relation R est certainement symétrique (la définition est manifestement symétrique) et réflexive puisqu'on a même $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) = g(x)$. Mais elle n'est pas du tout transitive : si fRg et gRh, alors il existe un réel x vérifiant $f(x) = g(x)$ et un réel x' vérifiant $g(x) = h(x)$, mais il n'y a aucune raison que x et x' soient égaux, et on peut donc très bien ne pas avoir fRh. Un contre-exemple facile : la fonction identité définie par $f(x) = x$ vérifie $0Rf$ (où 0 désigne la fonction constante égale à 0) et $fR1$ (idem, 1 désigne la fonction constante égale à 1), mais on n'a clairement pas $0R1$. La relation R n'est donc pas une relation d'équivalence !

(b) Deux fonctions constantes distinctes ne seront jamais reliées. Si on exclut la puissance 0 (qui est une fonction constante), toutes les puissances entières sont bijectives de $[0,1]$ vers $[0,1]$, et vérifient toutes $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Elles sont donc toutes reliées entre elles, et reliées à toutes les constantes comprises entre 0 et 1, mais pas aux autres constantes. La fonction ln n'a techniquement rien à faire dans cette liste puisqu'elle n'est pas définie en 0, mais si on passe outre ce détail, elle est bijective de $]0,1]$ vers $]-\infty,0]$. Elle sera donc reliée aux constantes négatives, mais à aucune fonction puissance (sa seule valeur positive étant atteinte en 1 où les fonctions puissances prennent la valeur 1). La fonction exponentielle est bijective de $[0,1]$ vers $[1,e]$, elle n'est pas reliée à ln, ni à la moindre fonction puissance (la seule valeur en commun étant 1 qui n'est pas atteinte au même endroit), et elle est bien sûr reliée aux constantes comprises entre 1 et e.

(c) Les fonction reliées à la fonction nulle sont celles qui s'annulent au moins une fois sur $[0,1]$. Celles qui sont reliées à ln sont celles dont la courbe coupe celle du logarithme népérien, mais on peut difficilement dire mieux (en fait, cette question est assez stupide).

2. (a) La relation $\leqslant$ est réflexive : $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \leqslant f(x)$ est toujours vérifié. Elle est transitive à cause de la transitivité de $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$: si $f(x) \leqslant g(x)$ et $g(x) \leqslant h(x)$ alors $f(x) \leqslant h(x)$, donc si les deux prémisses sont vérifiées pour tout $x \in [0,1]$, on aura bien $f \leqslant h$. Enfin, si on suppose $f \leqslant g$ et $g \leqslant f$, alors on aura, $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant f(x)$, donc $f(x) = g(x)$, ce qui revient bien à dire que $g = f$.

(b) Cette relation n'est pas du tout totale. Par exemple, si $f(x) = x$ et $g(x) = 1 - x$, on ne peut pas comparer f et g puisque $f(0) < g(0)$ mais $f(1) > g(1)$.

(c) Si k et k' sont deux constantes, la fonction constante égale à k est reliée à la fonction constante égale à k' si et seulement si $k \leqslant k'$ (de façon évidente). Toutes les fonctions puissances sont « plus grandes » que les puissances négatives, et « plus petites » que les constantes supérieures ou égales à 1. De plus, $(x \mapsto x^k) \leqslant (x \mapsto x^{k'})$ si et seulement si $k \geqslant k'$ (on est sur $[0,1]$, donc les puissances prennent des valeurs de plus en plus petites). La fonction ln est plus petite que toutes les constantes positives (mais n'est plus grande qu'aucune constante), et plus petite que toutes les puissances. Enfin, l'exponentielle est plus grande que toutes les puissances, et donc que ln, ainsi que des constantes inférieures ou égales à 1, mais plus petite que les constantes supérieures ou égales à e.

(d) Oui, on l'a déjà vu, l'ensemble est minoré par la fonction nulle, et majoré par la fonction constante égale à 1 (entre autres). Les fonctions puissances étant de plus en plus petites, l'ensemble admet pour maximum la fonction identité $x \mapsto x$, qui est donc aussi sa borne supérieure. Par contre, il n'y a pas de minimum. La borne inférieure est la fonction nulle sur $[0,1[$ mais vérifiant $f(1) = 1$. En effet, cette fonction est bien inférieure à toutes les fonctions puissances. De plus, si la borne inférieure vérifiait $f(x) = \alpha > 0$ pour un certain $x \in [0,1[$, alors il existerait un entier n pour lequel on aurait $x^n < \alpha$ (en effet, $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = 0$, donc on peut rendre les valeurs de ces puissances aussi proches de 0 qu'on le souhaite), ce qui contredit le fait que la borne inférieure minore toutes les fonctions puissances.

(e) Si un ensemble F de fonctions est majoré, cela signifie qu'il existe une fonction M vérifiant $\forall x \in [0,1]$, $\forall f \in F$, $f(x) \leqslant M(x)$. Pour un x fixé, l'ensemble $\{f(x) \mid f \in F\}$ est donc un ensemble majoré. L'énoncé avait oublié de préciser que l'ensemble devait être non vide : si c'est le cas, l'ensemble $\{f(x)\}$ est lui aussi non vide, et admet donc une borne supérieure. On note tout simplement g la fonction qui à chaque x associe la borne supérieure de l'ensemble correspondant, et cette fonction majore l'ensemble F par construction, et sera la borne supérieure de façon évidente (toute fonction majorante h vérifiant, pour chaque valeur de x, $g(x) \leqslant h(x)$ par minimalité de la borne supérieure de l'ensemble $\{f(x) \mid x \in F\}$.

3. La relation S n'est sûrement pas une relation d'ordre puisqu'elle n'est même pas réflexive ! En effet, une fonction qui n'a pas de minimum de vérifie par fSf. Par exemple, la fonction ln (prolongée de façon artificielle par $\ln(0) = 0$ pour qu'elle soit définie sur $[0,1]$) pose un

problème : $\forall x \in [0,1]$ on peut trouver $y \in [0,1]$, $\ln(y) < \ln(x)$, ce qui est exactement la négation de la propriété $\ln S \ln$. La relation T n'est pas non plus une relation d'odre... pour la même raison. Une fonction qui n'est pas constante ne vérifie absolument pas la condition imposée. Pour information, la relation S n'est pas non plus antisymétrique (deux fonctions ayant le même minimum sont reliées dans les deux sens sans nécessairement être égales), mais elle est transitive. La relation T est antisymétrique et transitive (c'est donc quasiment une relation d'ordre, une sorte d'équivalent de $<$).

Exercice 3

1. Trivialement, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$ (seule l'annulation du dénominateur peut poser problème).
2. Commençons donc par calculer $f(-1) = \left|\dfrac{2-5+1}{-1+3}\right| = 1$, puis $f(\sqrt{2}) = \left|\dfrac{5\sqrt{2}+5}{\sqrt{2}+3}\right| = \dfrac{(5\sqrt{2}+5)(3-\sqrt{2})}{9-2} = \dfrac{5+10\sqrt{2}}{7}$. Palpitant.
   Pour les antécédents de 1, il faut résoudre l'équation $|2x^2+5x+1| = |x+3|$. Pour une égalité de valeurs absolues, on a deux possibilités : soit $2x^2+5x+1 = x+3$, donc $2x^2+4x-2 = 0$, trinôme de discriminant $\Delta = 16+16 = 32$, ayant pour racines $x_1 = \dfrac{-4-4\sqrt{2}}{4} = -1-\sqrt{2}$, et $x_2 = -1+\sqrt{2}$; soit $2x^2+5x+1 = -x-3$, donc $2x^2+6x+4 = 0$, trinôme de discriminant $\Delta = 36-32 = 4$, ayant pour racines $x_3 = \dfrac{-6-2}{4} = -2$ et $x_4 = \dfrac{-6+2}{4} = -1$ (celle-là, on savait déjà qu'on allait l'obtenir depuis notre calcul de $f(-1)$). Finalement, 1 a quatre antécédents : -1, -2, $-1-\sqrt{2}$ et $-1+\sqrt{2}$.
3. On a bien sûr $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+5x+1}{x+3} = \pm\infty$ en conservant le quotient des termes de plus haut degré. Pas besoin de réellement se préocupper du signe de ces limites, la valeur absolue autour assure que $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. De même pour la limite en -3, inutile de distinguer deux cas ou de s'intéresser au signe : le numérateur ne tend pas vers 0 (il a en l'occurrence pour limite 4), le dénominateur tend vers 0, donc le quotient a une limite infinie et la valeur absolue permet d'affimrer que $\displaystyle\lim_{x\to-3} f(x) = +\infty$ (des deux côtés).
4. Calculons donc : $g(x) - 2x + 1 = \dfrac{2x^2+5x+1-2x^2-6x+x+3}{x+3} = \dfrac{4}{x+3}$, expression ayant une limite nulle en $\pm\infty$. On a donc $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} g(x) - (2x-1) = 0$, ce qui prouve que la droite d'équation $y = 2x+1$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction g des deux côtés. Attention à ne pas conclure trop vite pour f : du côté de $+\infty$, on peut conserver l'équation $y = 2x-1$ pour l'asymptote car $2x-1 \geqslant 0$ quand x tend vers $+\infty$ (donc $g(x)$ qui s'en approche le sera aussi), la valeur absolue n'aura pas d'influence). Mais du côté de $-\infty$, $g(x)$ et $2x-1$ prennent des valeurs négatives, donc on aura $f(x) = -g(x)$, qui va s'approcher de $-(2x-1) = -2x+1$. C'est donc la droite d'équation $y = -2x+1$ qui sera asymptote à la courbe de f du côté de $-\infty$.
5. Le numérateur de $g(x)$ a pour discriminant $\Delta = 25-8 = 17$, et s'annule donc pour $x_5 = \dfrac{-5-\sqrt{17}}{4}$ et $x_6 = \dfrac{-5+\sqrt{17}}{4}$. Le dénominateur s'annule évidemment pour $x = -3$. On constate que x_5 et x_6 sont toutes les deux supérieures à -3 (en effet, $-10 \leqslant -5-\sqrt{17} \leqslant -9$, donc x_5 est comprise entre -3 et -2), ce qui permet de faire le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-3		x_5		x_6		$+\infty$
$2x^2+5x+1$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$g(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

6. La fonction g est dérivable partout où elle est définie, et $g'(x) = \dfrac{(4x+5)(x+3) - 2x^2 - 5x - 1}{(x+3)^2} = \dfrac{2x^2+12x+14}{(x+3)^2}$. Cette dérivée est du signe de x^2+6x+7 (quitte à factoriser par 2 le numérateur), dont le discriminant vaut $\Delta = 36-28 = 8$, et les racines sont $x_7 = \dfrac{-6-2\sqrt{2}}{2} = -3-\sqrt{2}$ et $x_8 = -3+\sqrt{2}$. On va bien sûr calculer les images de ces deux valeurs : $g(\sqrt{2}-3) = \dfrac{2(\sqrt{2}-3)^2 + 5(\sqrt{2}-3)+1}{\sqrt{2}} = \dfrac{22-12\sqrt{2}+5\sqrt{2}-15+1}{\sqrt{2}} = \dfrac{8-7\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}-7$. De même, $g(-3-\sqrt{2}) = \dfrac{22+12\sqrt{12}-5\sqrt{2}-15+1}{-\sqrt{2}} = \dfrac{8+7\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -4\sqrt{2}-7$. D'où le tableau de variations suivant pour la fonction g (on a bien entendu constaté en passant que $x_7 < -3$ et $x_8 > -3$, ce qui est ici évident) :

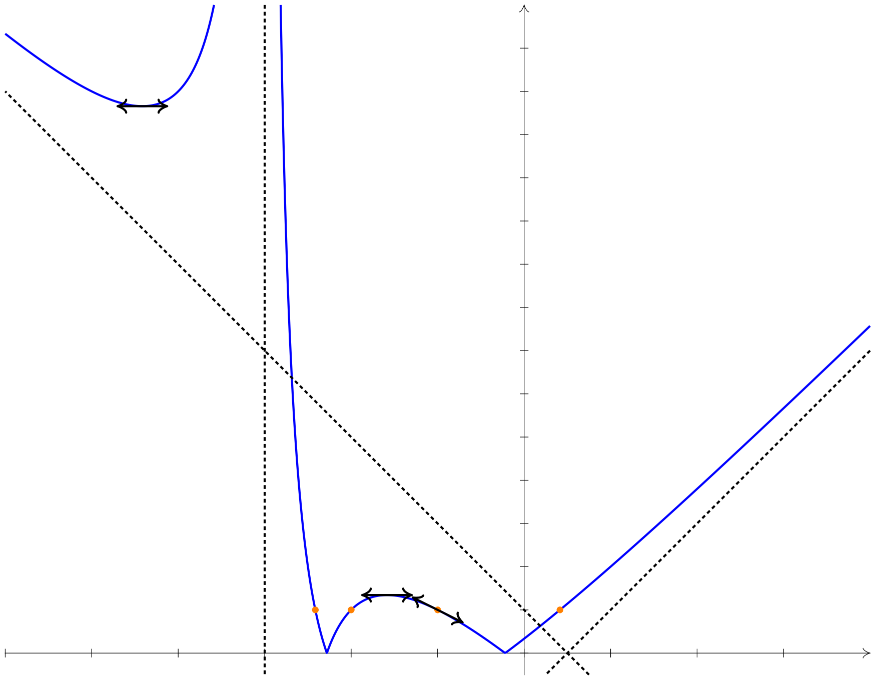
x	$-\infty$		$-3-\sqrt{2}$		-3		$-3+\sqrt{2}$		$+\infty$
g	$-\infty$	$\nearrow$	$-4\sqrt{2}-7$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$4\sqrt{2}-7$	$\nearrow$	$+\infty$

Pour obtenir le tableau de variations de f, on se contente de changer le signe (et le sens de variations) sur l'intervalle $]-\infty, -3[$, où g est toujours négative, ainsi que sur l'intervalle $[x_5, x_6]$, qui est inclus dans l'intervalle $]-3, +\infty[$. Notons que la valeur x_8 est comprise entre x_5 et x_6 (c'est nécessairement le cas puisque $g(x_8) = 4\sqrt{2}-7 \simeq 5.6-7 \simeq -1.4 < 0$, alors que g est positive à gauche de x_5 et à droite de x_6). On peut donc faire le superbe tableau suivant pour la fonction f :

x	$-\infty$		$-3-\sqrt{2}$		-3		$\frac{-5-\sqrt{17}}{4}$		$-3+\sqrt{2}$		$\frac{-5+\sqrt{17}}{4}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$4\sqrt{2}+7$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$7-4\sqrt{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

7. On a $g(-1) = -1$ (et $f(-1) = 1$, comme déjà constaté une ou deux fois en début d'exercice), et $g'(-1) = \dfrac{2-12+14}{2^2} = 1$. Attention, g étant négative au voisinage de -1, $f'(-1) = -g'(-1) = -1$ (la fonction f est bien décroissante en -1), donc la tangente demandée a pour équation $y = -(x+1)+1 = -x$.

8. On a déjà donné $f(x_8) \simeq 1.4$, précisons que $f(x_7) \simeq 5.6+7 \simeq 12.6$. Au niveau des abscisses, $x_8 \simeq -1.6$, $x_7 \simeq -4.4$, $x_5 \simeq -2.3$ et $x_6 \simeq -0.2$. On a aussi indiqué sur la courbe les quatre points correspondant aux antécédents de 1 par la fonction f :



Exercice 4

1. Avec les conditions imposées, $x = 1 - x - y < 1$, et de même pour y et z. On a donc $S \leqslant xy + yz + zx < 3$ (donc a fortiori l'inégalité large est vraie). De même, $-2xyz > -2$, donc $S \geqslant -2xyz > -2$. Si on prend comme valeurs $y = x$ et $z = 1 - x - y$, en faisant tendre x vers 0, on aura $S = x^2 + 2x(1-x) - 2x^2(1-x)$ qui tend vers 0, donc qui peut être rendu aussi proche de 0 qu'on le veut. Cela suffit à assurer qu'on ne peut pas trouver un minorant strictement positif.
2. Calculons dont brutalement le membre de droite : $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ac+a^2 = 2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$, donc $\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+ab^2+ac^2-a^2b-abc-a^2c+a^2b+b^3+bc^2-ab^2-b^2c-abc+a^2c+b^2c+c^3-abc-bc^2-ac^2 = a^3+b^3+c^3-3abc$ puisque tous les termes de la forme « produit d'un carré par une autre constante » se simplifient.
3. Si on suppose les variables a, b et c positives dans le calcul précédent, on aura clairement $\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \geqslant 0$, donc $a^3+b^3+c^3-3abc \geqslant 0$. Autrement dit, $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3} \geqslant abc$, ce qui donne l'inégalité souhaitée en posant $x = a^3$, $y = b^3$ et $z = c^3$. Pour obtenir la deuxième, on applique la première à $X = \dfrac{1}{x}$, $Y = \dfrac{1}{y}$ et $Z = \dfrac{1}{z}$: $3\sqrt[3]{\dfrac{1}{XYZ}} \leqslant \dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{Y} + \dfrac{1}{Z}$, donc $\dfrac{3}{\frac{1}{X}+\frac{1}{X}+\frac{1}{X}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{XYZ}}} = \sqrt[3]{XYZ}$ (les racines cubiques vérifiant les mêmes règles de calcul que les racines carrées). Les inverses X, Y et Z pouvant prendre toutes les valeurs strictement positives quand x, y et z parcourent $\mathbb{R}^{+*}$, la deuxième inégalité est valable sous les mêmes conditions que la première.
4. (a) On dérive donc (c'est une fonction polynômiale, donc dérivable) en ne considérant que x comme variable : $f'(x) = 3(x+y+z)^2 - 27yz$. Cette dérivée est positive lorsque $(x+y+z)^2 \geqslant 9yz$, donc pour $x+y+z \geqslant 3\sqrt{yz}$ (toutes les variables sont supposées positives ici), soit $x \geqslant 3\sqrt{yz} - y - z$. La fonction f sera décroissante entre 0 et cette valeur (si cette valeur est positive), et croissante ensuite.

(b) Calculons la valeur du minimum qu'on vient d'obtenir : $f(3\sqrt{yz}-y-z) = (3\sqrt{yz})^3 - 27(3\sqrt{yz}yz - y^2z - yz^2) = 27(yz)^{\frac{3}{2}} - 81(yz)^{\frac{3}{2}} + 27y^2z + 27yz^2 = 27yz(y+z-2\sqrt{yz}) = 27yz(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2 \geqslant 0$. La fonction f a donc un minimum positif, elle est toujours positive, ce qui prouve que $\dfrac{(x+y+z)^3}{27} \geqslant xyz$, puis en mettant des racines cubiques partout que $\dfrac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}$.

5. En reprenant la deuxième démonstration, pour avoir égalité, il faut déjà que le minimum de la fonction f soit nul, ce qui n'est le cas que si $y = z$ (le terme $(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2$ étant le seul à pouvoir s'annuler). L'abscisse du minimum est alors $x = 3\sqrt{y^2}-y-y = y$, ce qui prouve que l'égalité peut être vraie seulement quand $x = y = z$. La réciproque est évidente.
6. En combinant les deux inégalités de la question 3, on a montré que $\dfrac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \leqslant \dfrac{x+y+z}{3}$, ou encore que $9 \leqslant (x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$. En ajoutant l'hypothèse $x+y+z=1$, on en déduit que $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \geqslant 9$. Or, S peut s'écrire sous la forme $S = xyz\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}-2\right)$, donc $S \geqslant 7xyz$, quantité positive, ce qui prouve que S est toujours positive. Comme on a vu à la toute première question de l'exercice qu'on pouvait rendre S aussi proche de 0 qu'on le souhaitait, le minorant optimal (la borne inférieure en fait) est donc égal à 0.
7. Développons : $(1-2x)(1-2y)(1-2z) = (1-2x-2y+4xy)(1-2z) = 1-2x-2y+4xy-2z+4xz+4yz-8xyz = 1-2(x+y+z)+4(xy+yz+zx)-8xyz = 4S-1$ puisque $x+y+z$ est supposé égal à 1. Autrement dit, $S = \dfrac{(1-2x)(1-2y)(1-2z)+1}{4}$. Parmi les trois facteurs $1-2x$, $1-2y$ et $1-2z$, il y en a au maximum un de strictement négatif (puisque la négativité de $1-2x$ par exemple implique $x > \dfrac{1}{2}$, et que la somme des trois variables est égale à 1). Si l'un des facteurs est strictement négatif, on a donc $(1-2x)(1-2y)(1-2z) \leqslant 0$, donc $S \leqslant \dfrac{1}{4}$, majorant qui est lui-même égal à $\dfrac{7}{28}$ et donc inférieur à $\dfrac{7}{27}$ (pas de beaucoup, certes). Si maintenant les trois facteurs du numérateur sont positifs, on peut leur appliquer l'inégalité démontrée plus haut sous la forme $xyz \leqslant \dfrac{(x+y+z)^3}{27}$ pour obtenir $S \leqslant \dfrac{(1-2x+1-2y+1-2z)^3+27}{27\times 4} = \dfrac{(3-2(x+y+z))^3+27}{27\times 4} = \dfrac{28}{27\times 4} = \dfrac{7}{27}$.

   Pour prouver que la majoration ne peut pas être améliorée, il suffit de trouver un cas où $S = \dfrac{7}{27}$. On sait déjà que ça ne peut être atteint que si $x = y = z$, et donc si les trois variables prennent la valeur $\dfrac{1}{3}$ puisque leur somme est égale à 1. Vérifions : dans ce cas $S = \dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{2}{27} = \dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{27} = \dfrac{9-2}{27} = \dfrac{7}{27}$. Le majorant est bien optimal.

Exercice 5 (exercice bonus)

On pose donc $f(x) = x^{x-1} = e^{(x-1)\ln(x)}$, fonction définie et dérivable sur $]0,+\infty[$. Sous cette forme exponentielle, les limites sont évidentes : $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)\ln(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. De plus, $f'(x) = \left(\ln(x)+\dfrac{x-1}{x}\right)e^{(x-1)\ln-(x)}$. Cette dérivée est du signe de son premier facteur $\ln(x)+1-\dfrac{1}{x}$. Si on est observateur, on remarque que $1-\dfrac{1}{x}$ est positif si $\dfrac{1}{x} \leqslant 1$, donc si $x \geqslant 1$ (avec bien sûr l'hypothèse $x > 0$). Autrement dit, $1-\dfrac{1}{x}$ est exactement du même signe que $\ln(x)$, donc f' est négative sur $]0,1]$ et positive sur $[1,+\infty[$. On calcule la valeur du minimum $f(1) = e^0 = 1$, et on conclut tout simplement avec une allure de courve (pas grand chose d'intéressant à placer à part le minimum ici !) :