Devoir Surveillé n° 2

MPSI Lycée Camille Jullian

4 octobre 2025

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$
2. $\left|x + \dfrac{1}{x}\right| > 3$
3. $3^{x+1} + 2^{x-2} = 2^x + 3^x$
4. $4e^{2x} - 3e^{-x} = 7$
5. $|x-1| + |x^2-4| \leqslant 2 + |x+3|$
6. Et un petit complément qui n'est pas une résolution d'équation : évidemment sans utiliser de calculatrice, compléter le tableau suivant de valeurs approchées du logarithme **décimal** (on donnera le détail des calculs effectués) :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sqrt{27}$	42	500
$\log(x)$		0.30	0.48				0.85						

Exercice 2

Dans tout cet exercice, l'ensemble E est celui de toutes les fonctions définies sur le segment $[0,1]$. Le but de l'exercice est d'étudier plusieurs relations définies sur l'ensemble E.

1. Une première relation R est définie de la façon suivante : $fRg \Leftrightarrow \exists x \in [0,1],\ f(x) = g(x)$.
   (a) La relation R est-elle une relation d'équivalence sur E ? On justifiera bien sûr la réponse donnée.
   (b) Parmi toutes les fonctions suivantes, préciser lesquelles sont reliées par la relation R : fonctions constantes, fonctions puissances entières naturelles (donc $x \mapsto x^n$, avec $n \in \mathbb{N}$), fonction ln, fonction exponentielle (uniquement l'exponentielle de base e).
   (c) Décrire le plus simplement possible l'ensemble des fonctions reliées à la fonction nulle par cette relation. Décrire de même l'ensemble des fonctions reliées à la fonction ln par cette relation.
2. On considère désormais la relation notée $\leqslant$ et définie sur l'ensemble E par : $f \leqslant g$ si $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \leqslant g(x)$.
   (a) Montrer rigoureusement que $\leqslant$ est une relation d'ordre sur E.
   (b) Cette relation d'ordre est-elle totale ?
   (c) Parmi les fonctions données en question $1.b$ (constantes, puissances, ln, exp), préciser lesquelles sont reliées par la relation $\leqslant$.
   (d) On considère l'ensemble de toutes les fonctions puissances entières non nulles $\{x \mapsto x^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Cet ensemble est-il minoré pour la relation $\leqslant$? Majoré ? Admet-il un minimum, un maximum, une borne inférieure, une borne supérieure ? On justifiera évidemment toutes les réponses fournies.
   (e) Montrer que, pour la relation $\leqslant$, tout sous-ensemble majoré de l'ensemble E admet une borne supérieure.
3. Les relations S et T sont définies sur l'ensemble E de la façon suivante : $fSg \Leftrightarrow \exists x \in [0,1], \forall y \in [0,1], f(x) \leqslant g(y)$, et $fTg \Leftrightarrow \forall x \in [0,1], \forall y \in [0,1], f(x) \leqslant g(y)$. Les relations S et T sont-elles des relations d'ordre sur E ? Une fois de plus, on justifiera en détail les réponses fournies.

Exercice 3

On définit pour tout cet exercice la fonction f par $f(x) = \left|\dfrac{2x^2+5x+1}{x+3}\right|$.

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
2. Calculer l'image par f de -1 et de $\sqrt{2}$ (on simplifiera le plus possible la valeur obtenue), ainsi que les antécédents par f de 1.
3. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
4. En posant $g(x) = \dfrac{2x^2+5x+1}{x+3}$, calculer $g(x) - 2x + 1$, puis les limites de cette expression en $\pm\infty$. Que peut-on en déduire concernant la courbe représentative de g ? Et concernant celle de f ?
5. Étudier le signe de la fonction g (les valeurs obtenues ne seront pas forcément très sympathiques).
6. Étudier les variations de la fonction g, en déduire le tableau de variations complet de f.
7. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f en son point d'abscisse -1.
8. Tracer une allure soignée de la courbe représentative de la fonction f (on essaiera bien sûr de tenir compte de tous les calculs effectués dans l'exercice).

Exercice 4

Le but de cet exercice est d'encadrer le plus précisément possible la quantité $xy + yz + zx - 2xyz$ (qu'on notera S pour la suite de l'exercice), où x, y et z sont trois réels **strictement positifs** vérifiant $x + y + z = 1$.

1. Justifier que $-2 \leqslant S \leqslant 3$. Montrer que le minorant optimal ne peut pas être strictement positif.
2. Montrer que, $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \dfrac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$ (ne cherchez pas à trouver plus intelligent qu'un calcul brutal pour cette question).
3. En déduire que, si $(x, y, z) \in]0, +\infty[^3$, alors $\sqrt[3]{xyz} \leqslant \dfrac{x+y+z}{3}$. En déduire également, sous les mêmes hypothèses, que $\dfrac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \leqslant \sqrt[3]{xyz}$.
4. Cette question propose une nouvelle démonstration des inégalités obtenues à la question précédente (il faut donc la traiter indépendamment de cette dernière).
   (a) On pose $f(x) = (x + y + z)^3 - 27xyz$ (ici, seul x est variable, y et z étant donc des paramètres fixes supposés strictement positifs). Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) En déduire que $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3$, $\sqrt[3]{xyz} \leqslant \dfrac{x+y+z}{3}$.
5. Quelles conditions faut-il imposer sur x, y et z pour que l'inégalité qu'on vient de démontrer deux fois soit une égalité ? On justifiera soigneusement la réponse.
6. On suppose désormais que $x + y + z = 1$, montrer en utilisant les inégalités démontrées en cours de route que $S \geqslant 7xyz \geqslant 0$, en déduire la valeur du minorant optimal recherché.
7. Toujours en supposant $x+y+z = 1$, développer $(1-2x)(1-2y)(1-2z)$, et en déduire que $S \leqslant \dfrac{7}{27}$. Montrer que cette majoration ne peut pas être améliorée.

Exercice 5 (exercice bonus)

Effectuer l'étude complète (variations, limites, courbe) de la fonction définie par $f(x) = x^{x-1}$.