Devoir Surveillé n° 1

MPSI Lycée Camille Jullian

13 septembre 2025

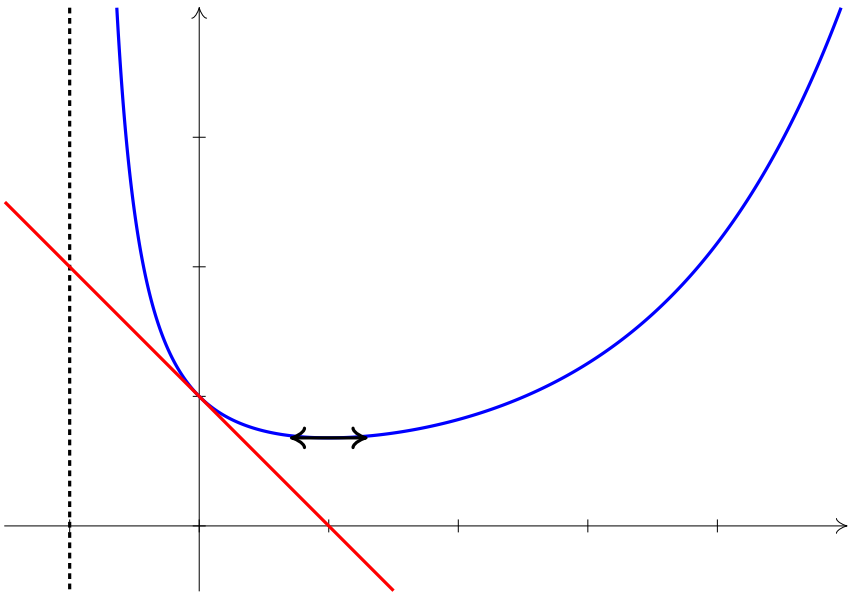
Exercice 1 (tiré d'un vieux sujet de bac)

1. (a) Il n'y a aucune difficulté pour la limite en -1 : le numérateur tend vers la valeur finie e^{-1} et le dénominateur vers 0, le tout restant toujours positif, donc $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = +\infty$. Du côté de $+\infty$, il s'agit d'une croissance comparée presque classique. Si on veut être très rigoureux, on factorise sous la forme $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2} \times \dfrac{1}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}$. Le deuxième quotient a une limite égale à 1, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ par croissance comparée, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   (b) La fonction f est dérivable sur $]-1,+\infty[$, et $f'(x) = \dfrac{e^x(x+1)^2 - e^x \times 2(x+1)}{(x+1)^4} = \dfrac{e^x(x+1-2)}{(x+1)^3} = \dfrac{(x-1)e^x}{(x+1)^3}$. Sur l'intervalle de définition de f, le dénominateur de f' est toujours positif, donc $f'(x)$ est du signe de $x-1$. La fonction est donc décroissante sur $]-1,1]$ puis croissante sur $[1,+\infty[$, atteignant en 1 un minimum de valeur $f(1) = \dfrac{e}{(1+1)^2} = \dfrac{e}{4} \simeq 0.7$. On peut résumer les calculs effectués jusqu'ici dans le tableau de variations suivant :

x	-1		1		$+\infty$
f	$+\infty$	↘	$\frac{e}{4}$	↗	$+\infty$

   (c) Puisque $f(0) = \dfrac{1}{1^2} = 1$ et $f'(0) = \dfrac{-1}{1^3} = -1$, la tangente demandée a pour équation $y = -x+1$. Elle est tracée en rouge sur le graphique ci-dessous :



(d) Techniquement, c'est le théorème de la bijection, qu'on verra bientôt ensemble en cours, qui permet de répondre correctement à ce genre de question. La fonction f étant continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]-1,1]$, elle effectue une bijection de $]-1,1]$ vers $\left[\frac{e}{4},+\infty\right[$. Comme $\frac{e}{4}<1$, l'équation $f(x)=1$ admet donc une solution unique sur l'intervalle $]-1,1]$. Il se trouve qu'on sait déjà que cette première solution est égale à 0 puisque $f(0)=1$. De même, f étant strictement croissante sur $[1,+\infty[$, l'équation $f(x)=1$ admettra une deuxième solution sur cet intervalle, qui correspond donc à α. Comme $f(2)=\frac{e^2}{3^2}=\left(\frac{e}{3}\right)^2<1$ (on sait que $e<3$) et $f(3)=\frac{e^3}{4^2}=\frac{e^3}{16}>1$ (comme $e>2.7$, $e^3>2.7^3=7.29\times 2.7>7\times 2.7>16$), la croissance de la fonction f sur l'intervalle $[1,+\infty[$ assure que $f(2)<f(\alpha)<f(3)$ implique $2<\alpha<3$.

2. (a) Vérifions : $f(x)-2h(x)=\frac{e^x(1+x)-2e^x}{(1+x)^3}=\frac{e^x(x-1)}{(1+x)^3}$, ce qui est bien la formule trouvée plus haut pour l'expression de $f'(x)$.

(b) La fonction est dérivable sans problème sur $]-1,+\infty[$ et $h'(x)=\frac{e^x(1+x)^3-e^x\times 3(1+x)^2}{(1+x)^6}=\frac{e^x(1+x-3)}{(1+x)^4}=\frac{(x-2)e^x}{(1+x)^4}$.

(c) En dérivant l'égalité obtenue en question a, on obtient $f''(x)=f'(x)-2h'(x)=\frac{(x-1)e^x}{(1+x)^3}-\frac{2(x-2)e^x}{(1+x)^4}=\frac{(x^2-1-2x+4)e^x}{(1+x)^4}=\frac{(x^2-2x+3)e^x}{(1+x)^4}$. Cette dérivée seconde est du signe de x^2-2x+3, trinôme ayant pour discriminant $\Delta=4-12=-8$. Ce trinôme est donc du signe de son coefficient dominant, à savoir positif, sur tout l'intervalle $]-1,+\infty[$, ce qui prouve que f est une fonction convexe. En particulier, sa dérivée f' est croissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2},1\right]$. On sait déjà que f' est négative sur cet intervalle d'après l'étude des variations de f, donc on aura, $\forall x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant f'(x)<0$, donc $|f'(x)|\leqslant\left|f'\left(\frac{1}{2}\right)\right|$. Or, $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-\frac{1}{2}\sqrt{e}}{(\frac{3}{2})^3}=-\frac{4\sqrt{e}}{27}$. Avec la valeur approchée donnée pour $\sqrt{e}$, $\frac{4\sqrt{e}}{27}\simeq\frac{6.6}{27}<\frac{1}{4}$ puisque $4\times 6.6\simeq 26.4<27$. Ouf, la majoration de la dérivée demandée est correcte !

3. (a) L'étude des variations de f permet d'affirmer que, si $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$, alors $f(1)\leqslant f(x)\leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$. Or, $f(1)=\frac{e}{4}>\frac{1}{2}$, et $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{e}}{(\frac{3}{2})^2}=\frac{4\sqrt{e}}{9}<1$ (en fait, on sait que $f(0)=1$, ce qui suffit à affirmer que $f\left(\frac{1}{2}\right)<1$). On a donc $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\Rightarrow\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 1$. On peut alors démontrer la propriété « $u_n\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ » par récurrence sur l'entier n : c'est vrai par hypothèse pour $u_0=1$, et si on suppose $\frac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant 1$, alors le calcul qu'on vient d'effectuer prouve que $\frac{1}{2}\leqslant f(u_n)=u_{n+1}\leqslant 1$, ce qui constitue exactement l'hérédité de notre récurrence.

(b) On applique le résultat en question pour $x=\beta$ (qui appartient d'après l'énoncé au bon intervalle) et $y=u_n$ (dont on vient de prouver qu'il est aussi dans le bon intervalle). On obtient alors $|f(u_n)-f(\beta)|\leqslant\frac{1}{4}|u_n-\beta|$, donc $|u_{n+1}-\beta|\leqslant\frac{1}{4}|u_n-\beta|$ (par hypothèse, $f(\beta)=\beta$).

(c) C'est une récurrence classique utilisant le résultat de la question précédente. Pour $n=0$, $|u_0-\beta|=|1-\beta|\leqslant\frac{1}{2}$ puisque $\beta\in\left[\frac{1}{2},1\right]$. C'est mieux que ce qui est demandé, à savoir $|u_0-\beta|\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^0=1$. Si on suppose désormais que, pour un certain entier n, on a $|u_n-\beta|\leqslant\frac{1}{4^n}$, alors en appliquant la question précédente puis l'hypothèse de récurrence, on en déduit que $|u_{n+1}-\beta|\leqslant\frac{1}{4}|u_n-\beta|\leqslant\frac{1}{4}\times\frac{1}{4^n}=\frac{1}{4^{n+1}}$.

(d) Une valeur absolue étant toujours positive, la quantité $|u_n-\beta|$ est encadrée par 0 et par $\frac{1}{4^n}$ qui

tend vers 0. D'après le théorème des gendarmes, on a donc $\lim_{n\to+\infty} |u_n - \beta| = 0$, ce qui revient exactement à dire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \beta$.

Exercice 2

1. Si A et B sont deux sous-ensembles d'un même ensemble E, alors $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Montrons par exemple la première des deux égalités :

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cap B$	$x \in \overline{A \cap B}$	$x \in \overline{A}$	$x \in \overline{B}$	$x \in \overline{A} \cup \overline{B}$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

   Les deux colonnes correspondant aux ensembles $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$ sont identiques, ce qui prouve bien leur égalité.

2. Commençons par la réciproque : j'avais faim à 15H, donc j'ai mangé à la cantine ce midi (on peut aussi préférer la version négative : je n'ai pas mangé à la cantine ce midi, donc je n'ai pas eu faim à 15H). Passons maintenant à la contraposée : je n'ai pas eu faim à 15H, donc je n'ai pas mangé à la cantine ce midi.

3. Comme toujours dans ce genre de cas, on change tous les quantificateurs, et on nie l'inégalité finale : $\forall l \in \mathbb{R}$, $\exists \varepsilon > 0$, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists n \geqslant n_0$, $|u_n - l| \geqslant \varepsilon$.

4. C'est très facile à démontrer en passant à la contraposée : si $\sqrt{x}$ est un nombre rationnel, alors on peut l'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, avec p et q entiers, et $x = (\sqrt{x})^2 = \frac{p^2}{q^2}$ est manifestement aussi rationnel. Cela prouve bien qu'un nombre (positif) irrationnel a une racine carrée irrationnelle.

5. (a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 1$
   (b) $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(y) =\neq f(x)$ (plein de variantes possibles ici)
   (c) $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \neq x$, $f(y) \neq 0$ (ça marche si f ne s'annule pas, auquel cas n'importe quel x va en fait convenir, et aussi si f s'annule exactement une fois, auquel cas il faut absolument choisir pour x l'abscisse vérifiant $f(x) = 0$)
   (d) $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant M$

6. (a) Comme l'affirmation 1 est vraie, le levier 2 (qu'on notera désormais L_2 est baissé et L_3 est levé. L'affirmation 2 est alors automatiquement vraie (puisque sa conclusion est vraie), et l'affirmation 2 aussi. Peu importe donc la position du levier 1. En résumé : L_2 baissé, L_3 levé, L_1 levé ou baissé au choix.
   (b) Il est plus simple ici de commencer par traiter l'affirmation 2 : le seul cas où l'implication est fausse est L_1 levé et L_3 baissé. L'affirmation 1 est alors automatiquement fausse, et la 3 aussi. La position du levier 2 importe donc peu : L_1 levé, L_2 levé ou baissé, L_3 baissé.
   (c) On vient de voir que, si l'affirmation 2 était fausse, les autres affirmations l'étaient aussi. On ne peut donc pas supposer que la seule affirmation fausse est la deuxième. Supposons l'affirmation 1 fausse et les deux autres vraies. On sait alors que L_3 est levé (affirmation 3) ce qui rend l'affirmation 2 automatiquement vraie. Par contre, pour que la première soit fausse, on doit avoir L_2 levé, puis L_1 baissé pour que l'affirmation 3 soit vraie. Une solution possible est donc : L_1 baissé, L_2 levé, L_3 levé.
   Supposons désormais que seule l'affirmation 3 est fausse. On a donc L_2 baissé et L_3 levé (affirmation 1), ce qui rend vraie l'affirmation 2. Pour que la troisième affirmation soit fausse, il faut maintenant que les deux premiers leviers soient levés, ce qui contredit nos hypothèses. Ce cas est donc impossible, ce qui laisse comme unique solution celle décrite plus haut.
   (d) Si l'affirmation 1 est vraie, L_1 est levé, L_2 baissé et L_3 levé. Mais dans ce cas l'affirmation 2 est vraie alors que L_2 est baissé, ça ne marche pas. L'affirmation 1 est donc fausse et L_1 baissé. L'affirmation 2 est alors nécessairement vraie (son hypothèse est fausse), donc L_2 est levé, ce qui confirme que l'affirmation 1 est fausse. L'affirmation 3 sera alors vraie seulement si L_3 est levé, ce qui laisse deux possibilités : L_1 baissé, L_2 levé, L_3 levé ou baissé.

Exercice 3

1. Il faut bien sûr éliminer la valeur interdite 1, puis étudier le signe de $\dfrac{x^3}{x-1}$. Le plus simple est de faire un tout petit tableau de signes :

x		0		1	
x^3	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x^3}{x-1}$	$+$	0	$-$	‖	$+$

   Finalement, $\mathcal{D}_f =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$.

2. En appliquant par exemple la règle du quotient des termes de plus haut degré, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3}{x-1} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Pas de limite à calculer en 0, où f est simplement définie (et $f(0) = 0$). Enfin, pas de difficulté pour obtenir $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$.

3. Factorisons donc : $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x^2 \times x}{x-1}} = \dfrac{|x|}{x}\sqrt{\dfrac{x}{x-1}} = \pm\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$ selon le signe de x. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$ (encore une fois, on peut appliquer le quotient des termes de plus haut degré), on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$. C'est le même calcul au signe près de l'autre côté : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$.

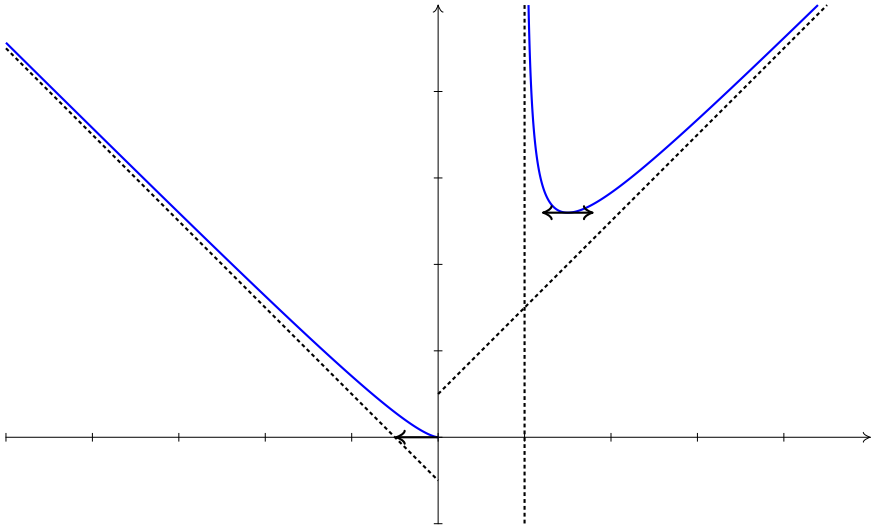
4. Reprenons le calcul de la question précédente, en supposant $x > 0$ pour ne pas traîner de valeur absolue inutile : $f(x) - x = x\left(\sqrt{\dfrac{x}{x-1}} - 1\right) = x \times \dfrac{\frac{x}{x-1} - 1}{\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 1} = \dfrac{x}{x-1} \times \dfrac{1}{\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 1}$. Le premier quotient a pour limite 1, le deuxième tend vers $\dfrac{1}{2}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \dfrac{1}{2}$. Autrement dit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \left(x + \dfrac{1}{2}\right) = 0$, ce qui revient à dire que la courbe de f se rapproche de la droite d'équation $y = x + \dfrac{1}{2}$ quand x tend vers $+\infty$, ce qui est exactement la définition d'une asymptote oblique.

5. Il faut cette fois chercher la limite en $-\infty$ (donc avec x négatif) de $f(x) + x = -x \times \sqrt{\dfrac{x}{x-1}} + x = x\left(-\sqrt{\dfrac{x}{x-1}} + 1\right) = -\dfrac{x}{x-1} \times \dfrac{1}{1 + \sqrt{\frac{x}{x-1}}}$. Cette fois-ci, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + x = -\dfrac{1}{2}$, et on conclut comme tout à l'heure : la droite d'équation $y = -x - \dfrac{1}{2}$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $-\infty$.

6. En posant $u(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$, on calcule $u'(x) = \dfrac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$, puis $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{x^2(2x-3)}{2(x-1)^2}\sqrt{\dfrac{x-1}{x^3}}$. Notons en passant que, sans surprise, f' n'est pas dérivable en 0, valeur d'annulation de l'expression sous la racine carrée dans la formule définissant f. Tout est positif dans cette dérivée sauf le terme $2x - 3$, qui s'annule quand $x = \dfrac{3}{2}$. La fonction f admet à cet endroit un minimum local de valeur $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{\frac{27}{8}}{\frac{3}{2} - 1}} = \sqrt{\dfrac{27}{4}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \simeq 2.5$. Profitons-en pour dresser un tableau de variations complet pour la fonction f :

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
f	$+\infty$	↘	0	↗ ‖	$+\infty$	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	$+\infty$

7. Puisque f n'est définie qu'à gauche de 0, on suppose x négatif pour pouvoir écrire $\sqrt{x^3} = -x\sqrt{-x}$, donc après simplification $f'(x) = \dfrac{(3-2x)\sqrt{-x}}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}$. Sous cette forme, on constate facilement que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$. Les tangentes à la courbe seront donc de plus en plus horizontales quand on s'approche de 0 (en fait, on peut dire que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.
8. Allons-y pour une jolie courbe, avec bien sûr les asymptotes obliques calculées en cours de route :



Problème

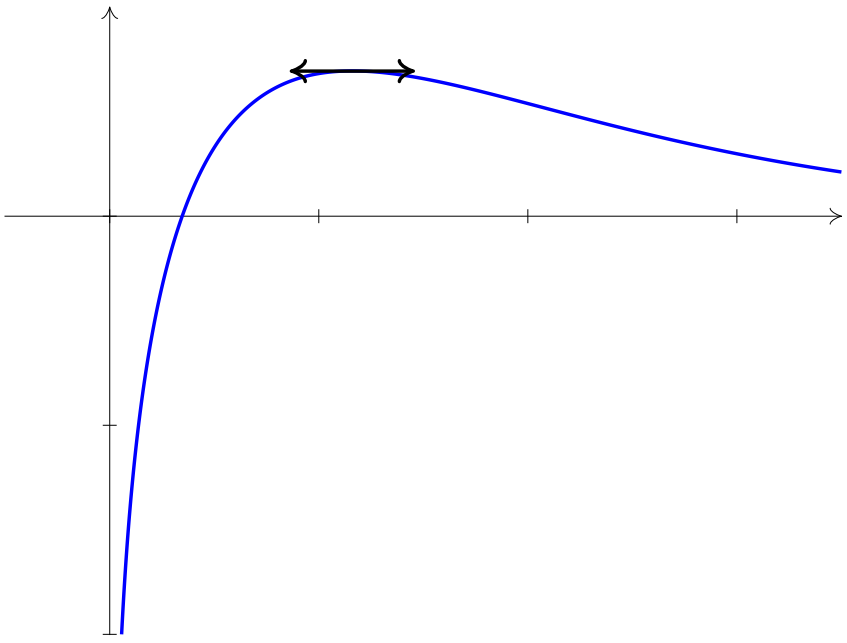
I. Étude de fonctions auxiliaires.

1. Il y a une belle forme indéterminée dans le facteur $(x-1)\ln(x-1)$. Mais quitte à poser $X = x-1$, qui va donc tendre vers 0 quand x tend vers 1, on se ramène à la limite $\lim\limits_{X\to 0} X\ln(X)$, qui est nulle par croissance comparée. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = 2$.
2. La fonction g est dérivable sur $]1,+\infty[$, et $g'(x) = 2 - \ln(x-1) - \dfrac{x-1}{x-1} = 1 - \ln(x-1)$. Cette dérivée est positive quand $\ln(x-1) \leqslant 1$, donc quand $x - 1 \leqslant e$, autrement dit sur $]1, e+1]$. La fonction g est donc croissante sur $]1, e+1]$, puis décroissante sur $[e+1, +\infty[$. Elle admet pour maximum $g(e+1) = 2e + 2 - e\ln(e) = e + 2 \simeq 4.7$.
3. On a déjà vu que la fonction g était décroissante sur $[e+1, +\infty[$. De plus, $g(x) = x\left(2 - \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)\ln(x-1)\right)$, ce qui permet de prouver facilement que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ (il n'y a plus de forme indéterminée). Comme $g(e+1) > 0$, la valeur 0 est bien atteinte par g sur l'intervalle $[e+1, +\infty[$. De plus, $g(e^3+1) = 2e^3 + 2 - e^3\ln(e^3) = 2 - e^3$, valeur largement négative qui prouve, via la décroissance de g, que $\alpha < e^3 + 1$. Enfin, on peut signaler que la fonction ne peut sûrement pas s'annuler sur l'intervalle $]1, e-1]$ puisqu'elle y est croissante et que $\lim\limits_{x\to 1} g(x) > 0$. On en déduit aisément que g est positive sur $]1, \alpha]$ puis négative sur $[\alpha, +\infty[$.
4. Comme $\ln(x^2-1) < \ln(x^2) = 2\ln(x)$ par croissance de la fonction ln, on a $\forall x \in \mathcal{D}_h$, $0 \leqslant h(x) \leqslant \dfrac{2\ln(x)}{x}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée, donc, via le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$. En 1, il n'y a pas le moindre problème : $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = \lim\limits_{x\to 1} \ln(x^2-1) = -\infty$.
5. Si on n'est pas sûr de soi, on commence par poser $u(x) = \ln(x^2-1)$, qu'on dérive pour obtenir $u'(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$. On peut ensuite dérivée h (toutes les fonctions manipulées sont sans problème dérivables sur $]1,+\infty[$) : $h'(x) = \dfrac{xu'(x) - \ln(x^2-1)}{x^2} = \dfrac{\frac{2x^2}{x^2-1} - \ln(x^2-1)}{x^2} = \dfrac{2x^2 - (x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2(x^2-1)}$. Le dénominateur de cette dérivée est toujours positif, donc h' est du signe de son numérateur, dans

lequel on reconnaît $g(x^2)$. Or, on a vu plus haut que $g(x) \leqslant 0$ sur $[\alpha, +\infty[$, ce qui prouve que $g(x^2) \leqslant 0$ si $x^2 \geqslant \alpha$, donc sur $[\sqrt{\alpha}, +\infty[$ (ici, x est toujours positif). Autrement dit, h sera croissante sur l'intervalle $]1, \sqrt{\alpha}]$ puis décroissante sur $[\sqrt{\alpha}, +\infty[$.

II. Étude de la fonction f.

1. La fonction f est définie si $e^{2x} - 1 > 0$ (son dénominateur ne peut pas s'annuler), donc si $e^{2x} > e^0$, ce qui par croissance de la fonction exponentielle sera le cas seulement si $x > 0$. Autrement dit, $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$.
2. C'est évident : $(e^x)^2 = e^{2x}$, donc $h(e^x) = \dfrac{\ln(e^{2x} - 1}{e^x} = f(x)$. Une **vraie** question triviale de temps en temps, ça fait du bien (mais ça ne rapporte guère de points).
3. Quand x tend vers $+\infty$, e^x aussi, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$. De même, comme $e^0 = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} h(x) = -\infty$. Enfin, f sera croissante tant que $e^x \leqslant \sqrt{\alpha}$, donc f est croissante sur l'intervalle $]0, \ln(\sqrt{\alpha})$ puis décroissante sur $[\ln(\sqrt{\alpha}), +\infty[$.
4. Le maximum atteint par f est exactement le même que celui de la fonction h (il est simplement atteint à une abscisse différente), donc égal à $h(\sqrt{\alpha}) = \dfrac{\ln(\alpha - 1)}{\sqrt{\alpha}}$. Bon, ça ne ressemble pas à ce qui est demandé, mais on n'oublie pas la définition de α : il vérifie $g(\alpha) = 0$, donc $2\alpha = (\alpha - 1)\ln(\alpha - 1)$. Autrement dit, $\ln(\alpha - 1) = \dfrac{2\alpha}{\alpha - 1}$, puis $h(\sqrt{\alpha}) = \dfrac{2\alpha}{\sqrt{\alpha}(\alpha - 1)} = \dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}$, soit exactement la valeur attendue.
5. Il n'y a pas grand chose à indiquer, mais grâce à la valeur approchée donnée, on peut placer correctement le maximum de f : abscisse $\ln(\sqrt{\alpha}) \simeq \ln(3) \simeq 1.1$, ordonnée (calculée à la question précédente) $\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1} \simeq \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$. La courbe demandée :



III. Calcul d'une primitive de f.

1. On a montré dans la deuxième partie de ce problème que $f(x) = h(e^x)$, donc, en dérivant cette relation, $f'(x) = e^x h'(e^x)$. On peut alors calculer $f(x) + f'(x) = h(e^x) + e^x h'(e^x) = \dfrac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x} + e^x \times \dfrac{2e^{2x} - (e^{2x} - 1)\ln(e^{2x} - 1)}{e^{2x}(e^{2x} - 1)} = \dfrac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x} + \dfrac{2e^x}{e^{2x} - 1} - \dfrac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x} = \dfrac{2e^x}{e^{2x} - 1}$. Or, $\dfrac{e^x}{e^x - 1} - \dfrac{e^x}{e^x + 1} = \dfrac{e^x(e^x + 1 - e^x + 1)}{(e^x - 1)(e^x + 1)} = \dfrac{2e^x}{e^{2x} - 1}$, ce qui correspond bien à l'expression obtenue pour $f'(x) + f(x)$.

2. Les deux quotients obtenus sont de la forme $\dfrac{u'}{u}$, donc admettent une primitive de la forme $\ln(u)$. Autrement dit, une primitive de $f'+f$ est donnée par $G(x) = \ln(e^x-1)-\ln(e^x+1) = \ln\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)$.
3. Puisque $G' = f' + f$, la fonction $G - f$ a pour dérivée $f' + f - f' = f$, et est donc une primitive de f. Une expression de cette fonction : $F(x) = \ln\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right) - \dfrac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$.