Devoir Surveillé n° 1

MPSI Lycée Camille Jullian

13 septembre 2025

Exercice 1 (tiré d'un vieux sujet de bac)

On considère dans cet exercice la fonction f définie sur $] -1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{(1+x)^2}$.

1. Étude de la fonction f .

- Calculer les limites de f en -1 et en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de la fonction f ?
- Étudier les variations de la fonction f .
- Tracer une allure de la courbe représentative de f , en y faisant figurer la tangente à la courbe en son point d'abscisse 0.
- Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution, qu'on notera α , et montrer que $2 \leq \alpha \leq 3$.

2. Pour la fin de l'exercice, on **admet** que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\beta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. On pose par ailleurs $h(x) = \frac{e^x}{(1+x)^3}$, définie comme f sur $] -1, +\infty[$.

- Vérifier que $f'(x) = f(x) - 2h(x)$.
- Calculer la dérivée de la fonction h .
- Calculer $f''(x)$ (on essaiera d'exploiter les questions précédentes), en déduire la convexité de la fonction f , puis montrer que, $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$. On **admet** pour la fin de l'exercice le résultat suivant, qui découle de celui démontré dans cette question : $\forall (x, y) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]^2$, $|f(y) - f(x)| \leq \frac{1}{4}|y - x|$.

3. On définit désormais une suite (u_n) de la façon suivante : $u_0 = 1$ puis $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
- En exploitant le résultat admis à la fin de la question 2, montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \beta| \leq |u_n - \beta|$.
- Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \beta| \leq \frac{1}{4^n}$.
- En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \beta$.

Exercice 2

Les différentes questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Rappeler l'énoncé des lois de Morgan, puis démontrer l'une d'entre elles à l'aide d'une table de vérité.
2. Écrire la réciproque, puis la contraposée, de l'implication suivante : « j'ai mangé à la cantine ce midi, donc j'avais à nouveau faim à 15H ».
3. Le fait qu'une suite (u_n) est convergente peut s'écrire sous la forme de l'énoncé quantifié suivant : $\exists l \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - l| < \varepsilon$. Écrire (toujours sous forme quantifiée) la négation de cette propriété.
4. Montrer que, si x est un nombre irrationnel, alors $\sqrt{x}$ est également un nombre irrationnel.
5. Soit f une fonction réelle, écrire à l'aide d'énoncés quantifiés les propriétés suivantes :
 - (a) f admet pour minimum global la valeur 1
 - (b) f n'est **pas** une fonction constante
 - (c) la fonction f s'annule au maximum une fois
 - (d) la fonction f n'est pas majorée (autrement dit, elle prend des valeurs aussi grandes qu'on veut)
6. Indiana Jones, à la recherche de l'arche perdue, arrive devant une porte fermée. Devant cette porte se trouvent trois leviers (numérotés de 1 à 3), qui peuvent être dans deux positions : levés ou baissés (indépendamment les uns des autres). Au-dessus de ces leviers se trouvent les affirmations suivantes : « le levier 2 est baissé et le levier 3 levé » (affirmation 1), « si le levier 1 est levé alors le levier 3 est levé » (affirmation 2), et « le levier 3 est levé mais au moins un des deux autres est baissé » (affirmation 3). Dans chacun des cas suivants, déterminer la position de chaque levier en justifiant (il se peut aussi que la situation soit impossible, dans ce cas on le justifie aussi) :
 - (a) les affirmations 1, 2 et 3 sont toutes vraies.
 - (b) les affirmations 1, 2 et 3 sont toutes fausses.
 - (c) exactement une des trois affirmations est fausse.
 - (d) pour chaque entier $i \in \{1, 2, 3\}$, l'affirmation i est vraie si et seulement si le levier i est levé.

Exercice 3

On va étudier dans cet exercice la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f (on doit obtenir **deux** intervalles).
2. Calculer les limites de f aux bornes de ce domaine de définition.
3. Après avoir factorisé par x^2 sous la racine carrée, calculer les limites de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$.
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$ (un calcul de quantité conjuguée $a-b = \frac{a^2 - b^2}{a+b}$ pourrait être utile ici), en déduire que la droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.
5. Déterminer de même l'équation d'une asymptote oblique en $-\infty$.
6. Calculer la dérivée f' de la fonction f , puis étudier les variations de f .
7. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$. Essayer d'interpréter géométriquement le résultat obtenu.
8. Tracer une allure soignée de la courbe de f , en tenant compte de tous les calculs effectués (asymptotes notamment).

Problème

On pose pour cet exercice $f(x) = \frac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x}$. Le but de l'exercice est d'étudier la fonction f et de déterminer une primitive de f .

I. Étude de fonctions auxiliaires.

On définit dans cette partie deux fonctions auxiliaires par $g(x) = 2x - (x - 1)\ln(x - 1)$ et $h(x) = \frac{\ln(x^2 - 1)}{x}$. Ces deux fonctions sont définies sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$.
2. Calculer la dérivée g' de la fonction g , puis étudier les variations de g .
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [e + 1, e^3 + 1]$, et préciser le signe de g sur les intervalles $]1, \alpha[$ et $]\alpha, +\infty[$.
4. Déterminer les limites de la fonction h aux bornes de son ensemble de définition.
5. Étudier les variations de la fonction h en exploitant l'étude de la fonction g effectuée ci-dessus.

II. Étude de la fonction f .

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f .
2. Montrer que, $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = h(e^x)$.
3. En déduire les limites et les variations de la fonction f .
4. Montrer que $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}$.
5. Tracer une allure de la courbe représentative de f (on pourra utiliser la valeur approchée $\alpha \simeq 9$ si besoin).

III. Calcul d'une primitive de f .

1. Montrer que, $\forall x > 0$, $f'(x) + f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1}$.
2. Déterminer une primitive de $f' + f$.
3. En déduire une primitive de la fonction f .