

Devoir Surveillé n° 10 : sujet B (sujet facile)

MPSI Lycée Camille Jullian

6 juin 2026

Ce sujet est constitué de trois exercices complètement indépendants. Les exercices ne sont pas forcément de difficulté et de longueur homogènes. Organisez-vous bien pour avoir le temps de tout aborder, ce qui devrait être faisable en quatre heures !

Exercice 1 (polynômes)

On cherche dans cet exercice à déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant l'équation $(E) : P(X^2) = P(X)P(X - 1)$.

1. Rappeler la relation existant entre les degrés des polynômes P , Q et $P \circ Q$, et montrer que l'équation (E) peut a priori être vérifiée par des polynômes de degré quelconque.
2. Déterminer les éventuels polynômes constants vérifiant l'équation (E) .
3. Factoriser le polynôme $X^4 + X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.
4. Calculer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de $F = \frac{X}{X^4 + X^2 + 1}$ puis la valeur de $\int_0^1 \frac{x}{x^4 + x^2 + 1} dx$ (question indépendante du reste de l'exercice).
5. Montrer que le polynôme $X^2 + X + 1$ est solution de l'équation (E) .
6. On suppose dans toute la suite de l'exercice que P est un polynôme non nul solution de (E) . Montrer que, si α est racine de P , alors α^2 et $(\alpha + 1)^2$ sont aussi racines de P .
7. On veut prouver par l'absurde que 0 n'est pas racine de P . On définit pour cela une suite récurrente (u_n) en posant $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (1 + u_n)^2$.
 - (a) Montrer que (u_n) est strictement croissante, puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
 - (b) Montrer que, si $P(0) = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, P(u_n) = 0$.
 - (c) En déduire que 0 ne peut pas être racine de P .
8. On suppose désormais que α est une racine non nulle de P .
 - (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, P(\alpha^{2^n}) = 0$.
 - (b) En déduire qu'il existe un entier $k \neq 0$ tel que α soit une racine k -ème de l'unité.
 - (c) Montrer qu'alors $|\alpha| = |\alpha + 1| = 1$.
 - (d) En déduire enfin que $\alpha = j$ ou $\alpha = j^2$, où on a posé comme d'habitude $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
9. Montrer que les seuls polynômes non nuls solutions de (E) sont les polynômes $P_k = (X^2 + X + 1)^k$, avec $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 (probabilités et algèbre linéaire)

On dispose pour ce problème de deux urnes U_1 et U_2 qui contiennent initialement une boule blanche et une boule noire chacune. On effectue une suite de tirages dans ces deux urnes selon le protocole suivant : à chaque nouveau tirage, on tire une boule dans l'urne U_1 et une boule dans l'urne U_2 et on échange les boules d'urne (la boule tirée dans U_1 est remise dans l'urne U_2 , et inversement). On notera, pour tout entier naturel n , X_n le nombre de boules blanches présentes dans l'urne U_1 à l'issue du n -ème tirage. On notera par ailleurs $a_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$, $b_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$ et $c_n = \mathbb{P}(X_n = 2)$.

1. Préciser les valeurs de a_0 , b_0 et c_0 , puis calculer les valeurs de a_1 , b_1 et c_1 . On présentera les résultats sous forme de tableau représentant la loi des variables aléatoires X_0 et X_1 . Calculer l'espérance de la variable X_1 .
2. Que vaut $a_n + b_n + c_n$ pour tout entier n ? On justifiera rapidement la réponse donnée.
3. Déterminer toutes les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{X_n=i}(X_{n+1} = j)$, lorsque i et j sont des entiers égaux à 0, 1 ou 2. En déduire une expression de a_{n+1} , b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n .
4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n + 2c_n = 1$. Interpréter ce résultat en termes d'espérance de la variable X_n .

5. En notant $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, vérifier que $X_{n+1} = MX_n$, où on a posé $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$.

6. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = 2a_n - b_n + 2c_n$ est une suite géométrique dont on donnera une expression explicite.
7. À l'aide des résultats des questions 4 et 6, déterminer des expressions explicites pour a_n , b_n et c_n , puis calculer les limites de ces suites quand n tend vers $+\infty$.
8. Dans cette dernière question, on se propose de retrouver les résultats précédents en effectuant une étude algébrique des propriétés de la matrice M définie en question 5. On notera pour cela f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à M .
 - (a) Calculer M^2 et M^3 , puis trouver une relation entre M^3 , M^2 et M . La matrice M est-elle inversible?
 - (b) Expliquer pourquoi les valeurs propres de f sont nécessairement racines du polynôme $2X^3 - X^2 - X$. En déduire les valeurs propres en question.
 - (c) Calculer les vecteurs propres associés aux valeurs propres obtenues à la question précédente, et montrer que f est une application diagonalisable.
 - (d) En notant P la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^3 vers une base de vecteurs propres de f , expliciter la matrice P et calculer son déterminant, puis son inverse P^{-1} .
 - (e) Vérifier que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D à préciser.
 - (f) Avec les notations de la question 4, montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = M^n X_0$, puis que $X_n = PD^n P^{-1} X_0$.
 - (g) Retrouver les expressions de a_n , b_n et c_n à l'aide de cette dernière égalité.

Exercice 3 (analyse)

On s'intéresse dans cet exercice à une suite (u_n) définie par récurrence de la façon suivante : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{\frac{1}{u_n}}$. On notera f la fonction définie par $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$.

1. Étude de la suite (u_n) .

- (a) Montrer que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs.
- (b) Déterminer la monotonie de (u_n) .
- (c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2. Étude de la fonction f .

- (a) Calculer les limites de f au bord de son domaine de définition. On précisera si les éventuels prolongements par continuité envisageables pour f sont dérivables.
- (b) Étudier les variations de f , et dresser son tableau de variations complet.
- (c) Rappeler la valeur de la somme de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!}$, pour $x \in \mathbb{R}$. En déduire que

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}.$$

- (d) On fixe un réel $x \geq 1$. Montrer que $\frac{1}{2} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leq e$, puis que $\frac{1}{2x} \leq f(x) - (x+1) \leq \frac{e}{x}$.
 - (e) En déduire la présence d'une asymptote oblique à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$, et préciser la position relative de la courbe et de son asymptote dans ce même voisinage.
 - (f) Retrouver le résultat précédent à l'aide d'un calcul direct de développement asymptotique à trois termes de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$. Que se passe-t-il du côté de $-\infty$?
 - (g) Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction f (on fera figurer l'asymptote dans le même repère).
3. Comportement asymptotique de la suite (u_n) .

- (a) Montrer que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \frac{1}{u_k}$. En déduire que, $\forall n \geq 1$, $\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$.
- (b) À l'aide de l'encadrement de la question 2.d, montrer que $1 + \frac{1}{2u_k} \leq u_{k+1} - u_k \leq 1 + \frac{e}{u_k}$, puis que $1 + \frac{1}{2} \ln(u_n) \leq u_n - n \leq 1 + e \ln(u_n)$.
- (c) Déterminer un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$, puis un équivalent simple de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$ (on veillera à rédiger soigneusement ce dernier calcul).