

Devoir Surveillé n° 10 (sujet A) : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

6 juin 2026

Problème 1 (analyse) : étude d'une famille d'intégrales.

I. Calcul de quelques valeurs particulières.

1. On commence en douceur : $I_{0,k} = \int_0^1 1 \, dx = 1$, quelle que soit la valeur de k .
2. On continue presque en douceur : $I_{n,1} = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^n} \, dx = \left[-\frac{1}{(n-1)(1+x)^{n-1}} \right]_0^1 = -\frac{1}{(n-1)2^{n-1}} + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right)$ lorsque $n \geq 2$. Il faut quand même penser à isoler le cas où $n = 1$: $\int_0^1 \frac{1}{1+x} \, dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$. Enfin, on a déjà calculé $I_{0,1} = 1$.
3. On a bien sûr $I_{1,2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx = [\arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$. Effectuons une IPP sur $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx$ en posant $u(x) = \frac{1}{1+x^2} \, dx$, donc $u'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \, dx$, et $v'(x) = 1$ qu'on intègre en $v(x) = x$. On obtient donc $I_{1,2} = \left[\frac{x}{1+x^2} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \, dx$. Avec une petite astuce belge, $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{2x^2+2}{(1+x^2)^2} \, dx - \int_0^1 \frac{2}{(1+x^2)^2} \, dx$, donc $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} - 2I_{2,2}$, dont on déduit $I_{2,2} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$.
4. C'est un calcul que nous avons fait en cours il y a quelques mois. Déjà, on constate que -1 est un pôle évident de la fraction F , dont on peut donc factoriser le dénominateur sous la forme $x^3+1 = (x+1)(ax^2+bx+c) = ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c$. Une petite identification impose $a = 1$, $a+b = 0$ donc $b = -1$ et $c = 1$, donc on aura une décomposition en éléments simples théorique de la forme $\frac{1}{X^3+1} = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1}$. On calcule a par la méthode habituelle (multiplication par $X+1$ puis évaluation pour $X = -1$), ce qui donne $a = \frac{1}{3}$. Calculons immédiatement la première partie de notre intégrale : $\int_0^1 \frac{1}{3(x+1)} \, dx = \frac{1}{3} [\ln(x+1)]_0^1 = \frac{\ln(2)}{3}$. Revenons à notre décomposition en éléments simples : en multipliant par x puis en faisant tendre x vers $+\infty$, on a $0 = a + b$, donc $b = -a = -\frac{1}{3}$. Enfin, en évaluant simplement pour $X = 0$, on trouve $1 = a + c$, donc $c = 1 - a = \frac{2}{3}$. Il nous reste donc à calculer l'intégrale $\int_0^1 -\frac{1}{3} \times \frac{x-2}{x^2-x+1} \, dx = -\frac{1}{6} \int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1} \, dx + \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{\frac{3}{2}}{x^2-x+1} \, dx = -\frac{1}{6} [\ln(x^2-x+1)]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \, dx = 0 + \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}))^2 + 1} \, dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2} \right) \right) \right]_0^1 =$

$\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \arctan \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. On a bien prouvé que $I_{1,3} = \frac{\ln(2)}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

5. Lorsque $x \in [0, 1]$, $\frac{1}{1+x^k} \in [0, 1]$ quelle que soit la valeur de l'entier k . On a donc, à k fixé, $\frac{1}{(1+x^k)^{n+1}} \leq \frac{1}{(1+x^k)^n}$, et il suffit d'intégrer sur l'intervalle $[0, 1]$ pour en déduire la décroissance de la suite $(I_{n,k})$. Cette suite étant par ailleurs trivialement minorée par 0, elle converge donc toujours. Le calcul explicite de $I_{n,1}$ effectué plus haut montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n,1} = 0$, et que $I_{n,1} \sim \frac{1}{n-1} \sim \frac{1}{n}$.

II. Une relation de récurrence.

- Encore une partie qui commence par une question triviale : par linéarité de l'intégration,
$$I_{n+1,k} + J_{n+1,k} = \int_0^1 \frac{1+x^k}{(1+x^k)^{n+1}} dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^k)^n} dx = I_{n,k}.$$
- Si on veut faire une IPP sans faire de choix peu naturels pour les fonctions u et v , le plus malin est de reprendre l'astuce de la question I.3 et de partir de $I_{n,k} = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^k)^n}$, puis d'effectuer une IPP en posant $u(x) = \frac{1}{(1+x^k)^n}$, donc $u'(x) = -\frac{nkx^{k-1}}{(1+x^k)^{n+1}}$, et $v'(x) = 1$ qu'on intègre bien sûr en $v(x) = x$. On obtient alors
$$I_{n,k} = \left[\frac{x}{(1+x^k)^n} \right]_0^1 + nk \int_0^1 \frac{x^k}{(1+x^k)^{n+1}} = \frac{1}{2^n} + nk J_{n+1,k}.$$
 En divisant cette égalité par le facteur kn , on trouve bien $J_{n+1,k} = -\frac{1}{kn2^n} + \frac{1}{kn} I_{n,k}$.
- En exploitant les deux questions précédentes, $I_{n+1,k} = I_{n,k} - J_{n+1,k} = I_{n,k} + \frac{1}{kn2^n} - \frac{1}{kn} I_{n,k} = \frac{1}{kn2^n} + \left(1 - \frac{1}{kn}\right) I_{n,k}$.
- On a calculé aisément $I_{1,2} = \frac{\pi}{4}$. En appliquant la formule avec $n = 1$ et $k = 2$, on en déduit $I_{2,2} = \frac{1}{4} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$. Ouf, c'est bien la valeur déjà calculée pour $I_{2,2}$. On reprend alors la relation avec $k = n = 2$, et $I_{3,2} = \frac{1}{16} + \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{3\pi}{32} = \frac{1}{4} + \frac{3\pi}{32}$, qui est bien la valeur exacte de $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^3} dx$. Par contre, il ne faut pas trop s'emballer, on ne peut pas obtenir facilement une expression simple de $I_{n,2}$ valable pour tout entier n (une horreur avec des factorielles partout est envisageable si on est très courageux).

III. Fonctions définies par une intégrale.

- Encore une question triviale en début de partie : si $y > 0$, le dénominateur $x^2 + y^2$ ne s'annule jamais sur $[0, 1]$ et la fonction $x \mapsto f_x(y)$ est donc continue sur $[0, 1]$, de même que toutes ses puissances entières, ce qui assure l'existence de son intégrale et donc la définition de $F_n(y)$.
- Il s'agit de calculer
$$F_1(y) = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + y^2} dx = \frac{1}{y^2} \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{y^2} \left[y \arctan \left(\frac{x}{y} \right) \right]_0^1 = \frac{1}{y} \arctan \left(\frac{1}{y} \right).$$
- (a) L'inégalité de Taylor-Lgrange permet en effet d'affirmer que, si la fonction g_n est de classe \mathcal{C}^2 (ce qui sera le cas sans problème en pratique), alors $|g_n(y+h) - g_n(y) - hg'_n(y)| \leq$

$\frac{h^2}{2} \times M_n$, où M_n est le maximum sur $[0, h]$ (ou sur $[h, 0]$ si $h < 0$, cas qui n'est pas exclu dans l'énoncé) de la fonction g_n'' . En divisant par $|h|$, on obtient exactement l'inégalité demandée, à condition d'arriver à trouver un majorant de g_n'' indépendant de h . Allons-y pour un peu de calcul (on utilise une variable appelée z pour les calculs puisque la valeur de y est fixée et qu'on veut faire varier ce z entre y et $y + h$) : $g_n(z) = \frac{1}{(x^2 + z^2)^n}$, donc $g_n'(z) = -\frac{2nz}{(x^2 + z^2)^{n+1}}$, puis $g_n''(z) = \frac{-2n(x^2 + z^2)^{n+1} + 2nz \times 2(n+1)z(x^2 + z^2)^n}{(x^2 + z^2)^{2n+2}} = \frac{-2nx^2 - 2nz^2 + 4n(n+1)z^2}{(x^2 + z^2)^{n+2}} = \frac{2n((2n+1)z^2 - x^2)}{(x^2 + z^2)^{n+2}}$. Il est temps d'appliquer l'hypothèse $|h| < \frac{y}{2}$. Ici, $z \in [y, y + h]$ ou $z \in [y + h, y]$ selon le signe de h . Dans les deux cas, avec l'hypothèse faite sur h , on a $\frac{y}{2} \leq z \leq \frac{3y}{2}$ (y étant toujours une variable positive). On peut donc majorer en valeur absolue le numérateur de $g_n''(z)$ par $2n \times \frac{9}{4}(2n+1)y^2$, et le dénominateur de cette même fraction peut être **minoré** par $\left(x^2 + \frac{1}{4}y^2\right)^{n+2}$. Globalement, on a bien une majoration de $g_n''(z)$ par une expression absolue atroce mais ne dépendant plus que de y et de x , et définie et continue (en fixant la valeur de y) sur l'intervalle $[0, 1]$.

(b) On peut donc écrire $\int_0^1 \left| \frac{g_n(y+h) - g_n(y)}{h} - g_n'(y) \right| dx \leq \frac{|h|}{2} \int_0^1 M(y) dx$. Or, par inégalité triangulaire (dans le sens inhabituel, avec une soustraction), notre membre de gauche

$$\text{est plus grand que } \left| \int_0^1 \frac{g_n(y+h) - g_n(y)}{h} dx - \int_0^1 g_n'(y) dx \right|$$

$$= \left| \frac{F_n(y+h) - F_n(y)}{h} - (-2ny) \int_0^1 \frac{1}{(x^2 + y^2)^{n+1}} dx \right| = \left| \frac{F_n(y+h) - F_n(y)}{h} + 2nyF_{n+1}(y) \right|,$$

quantité qui est donc majorée par $\frac{|h|}{2} \int_0^1 M(y) dx$, et qui tend donc vers 0 quand h tend vers 0 (puisque l'intégrale dans le majorant ne dépend absolument pas de la variable h). On vient de prouver que le taux d'accroissement $\frac{F_n(y+h) - F_n(y)}{h}$ avait pour limite $-2nyF_{n+1}(y)$ quand h tend vers 0, ce qui prouve à la fois que F_n est dérivable en y (pour n'importe quelle valeur de $y > 0$), et que $F_n'(y) = -2nyF_{n+1}(y)$.

4. La fin du problème est purement calculatoire. On a déjà calculé $F_1(y) = \frac{1}{y} \arctan\left(\frac{1}{y}\right)$,

donc $F_1'(y) = -\frac{1}{y^2} \arctan\left(\frac{1}{y}\right) + \frac{1}{y} \times \frac{-\frac{1}{y^2}}{1 + \frac{1}{y^2}} = -\frac{1}{y^2} \arctan\left(\frac{1}{y}\right) - \frac{1}{y^3 + y}$. Il ne reste plus qu'à appliquer la formule de la question précédente pour $n = 1$: $F_1'(y) = -2yF_2(y)$, donc $F_2(y) = -\frac{1}{2y} F_1'(y) = \frac{1}{2y^3} \arctan\left(\frac{1}{y}\right) + \frac{1}{2y^2 + 2y^4}$.

Bon, ben il faut repartir pour un tour : $F_2'(y) = -\frac{3}{2y^4} \arctan\left(\frac{1}{y}\right) + \frac{1}{2y^3} \times \frac{-1}{y^2 + 1} + \frac{-2y - 4y^3}{2y^4(y^2 + 1)^2} = -\frac{3}{2y^4} \arctan\left(\frac{1}{y}\right) - \frac{2 + 4y^2 + y^2 + 1}{2y^3(y^2 + 1)^2} = -\frac{3}{2y^4} \arctan\left(\frac{1}{y}\right) - \frac{3 + 5y^2}{2y^3(y^2 + 1)^2}$.

Il ne reste plus qu'à appliquer à nouveau la relation de récurrence : $F_3(y) = -\frac{1}{4y} F_2'(y) = \frac{3}{8y^5} \arctan\left(\frac{1}{y}\right) + \frac{3 + 5y^2}{8y^4(y^2 + 1)^2}$. Une expression absolument sublime. On constate toutefois

aisément que $I_{n,2} = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^n} dx = F_n(1)$, donc $I_{3,2} = F_3(1) = \frac{3}{8} \arctan(1) + \frac{3+5}{8 \times 2^2} = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}$. Je laisse les plus courageux d'entre vous essayer de mener les calculs plus loin s'ils ont vraiment beaucoup beaucoup de temps à perdre.

Problème 2 (algèbre) : matrices nilpotentes.

I. Généralités sur H_n et N_n .

- Par définition, H_n est le noyau de la trace, qui est une forme linéaire définie sur l'espace E_n . C'est donc non seulement un sous-espace vectoriel de E_n , mais même un hyperplan (la trace n'étant évidemment pas toujours nulle), ce qui prouve que $\dim(H_n) = \dim(E_n) - 1 = n^2 - 1$. En particulier, l'espace H_2 est de dimension 3. De fait, $H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$, et la famille de trois matrices de ce Vect est une base de H_2 (la famille est trivialement libre, et elle a le même nombre d'éléments que la dimension de H_2).
- Non, H_n n'est pas du tout stable par produit matriciel, par exemple $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin H_n$. Par contre, parmi les rares propriétés de la trace vues en cours, on sait qu'on a toujours $\text{Tr}(BA) = \text{Tr}(AB)$, donc si l'une des ces traces est nulle, l'autre aussi.
- C'est là aussi complètement faux, par exemple la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ appartient à H_3 , mais a pour inverse $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, qui n'a pas du tout une trace nulle. C'est par contre vrai dans H_2 (on peut le démontrer facilement à l'aide de la formule explicite de l'inverse obtenue via la comatrice).
- Le plus simple est de prendre $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est clairement nilpotente (son carré est nul), et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (tout aussi clairement nilpotente). Leur somme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour carré la matrice identité, et elle ne peut donc pas être nilpotente (ses puissances sont alternativement égales à $A + B$ et à I_2).
Si A et B commutent, avec $A^p = 0$ et $B^q = 0$ (aucune raison a priori que les deux puissances soient identiques), on peut appliquer la formule du binôme de Newton : $(A + B)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} A^k B^{p+q-k}$. Dans cette somme, tous les termes sont nuls (soit $k \geq p$, soit $p+q-k \geq q$), donc $A + B$ est également nilpotente.
- Non, toujours pas de stabilité par produit. On peut d'ailleurs prendre le même contre-exemple qu'à la question précédente. Le produit AB a été calculé en question 2, et il n'est pas du tout nilpotent (c'est une matrice de projection dont toutes les puissances sont égales à elle-même). Par contre, si A est nilpotente et commute avec B , on aura tout bêtement $(AB)^p = A^p B^p$, donc AB sera effectivement nilpotente.
- En effet, on peut commencer par constater que $(I_n - A)(I_n + A) = I_n - A^2$ (toute matrice commute avec I_n). Si on suppose $A^2 = 0$, on constate que $I_n - A$ et $I_n + A$ sont inverses l'une

de l'autre. On généralise facile ce résultat : $(I_n - A)(I_n + A + A^2 + \dots + A^k) = I_n - A^{k+1}$ pour tout entier $k \geq 1$. Si A est nilpotente et vérifie $A^p = 0$, $I_n - A$ est donc inversible, d'inverse $I_n + A + \dots + A^{p-1}$.

7. Il suffit de constater que, pour tout entier naturel k , $(BA)^{k+1} = B(AB)^k A$ (si on tient vraiment à démontrer rigoureusement ce résultat, on fait une récurrence débile). Si AB est nilpotente et vérifie $(AB)^p = 0$, on a donc $(BA)^{p+1} = 0$ et BA est elle aussi nilpotente.
8. Par contraposée, la première propriété énoncée est évidente : si $A^{p-1}X = 0$ pour tout vecteur-colonne X , alors $A^{p-1} = 0$ (si ça ne vous semble pas évident, on peut dire que l'application linéaire canoniquement associée à A^{p-1} envoie tout vecteur sur 0, donc est l'application nulle). La liberté de la famille indiquée peut se prouver par récurrence sur p si on veut être très soigneux, mais je préfère vous faire comprendre l'esprit de cette propriété : supposons donc qu'il existe une combinaison linéaire annulant la famille (exceptionnellement je numérote les coefficients à partir de 0 par cohérence vis-à-vis des puissances de A) : $\lambda_0 X + \lambda_1 AX + \dots + \lambda_{p-1} A^{p-1} X = 0$. On multiplie cette égalité par A^{p-1} , et comme $A^p = 0$ (et bien entendu les puissances de A plus grandes que p sont toutes nulles), cela annule tous les termes de la combinaison sauf le premier, donc $\lambda_0 A^{p-1} X = 0$. Mais comme on vient de prouver que $A^{p-1} X \neq 0$, cela implique $\lambda_0 = 0$. On a donc $\lambda_1 AX + \lambda_2 A^2 X + \dots + \lambda_{p-1} A^{p-1} X = 0$. On multiplie désormais par A^{p-2} avec des conséquences similaires : il ne reste que la condition $\lambda_1 A^{p-1} X = 0$, donc $\lambda_1 = 0$. En itérant le processus, tous les coefficients λ_i s'annulent et la famille est donc libre (une autre façon d'être rigoureux sans récurrence : on note k le plus petit indice de la combinaison linéaire pour lequel $\lambda_k \neq 0$, et en multipliant par A^{p-1-k} , on obtient immédiatement une contradiction). Bien entendu, si une famille contenant p vecteurs est libre dans \mathbb{R}^n , on a nécessairement $p \leq n$ (ce qui prouve la fameuse propriété que je vous ai citée plusieurs fois en cours : si M est une matrice nilpotente dans E_n , alors sa puissance n est nécessairement nulle).
9. Notons f l'application linéaire canoniquement associée à la matrice J . On a donc, en notant (e_1, \dots, e_n) la base canonique, $f(e_i) = e_{i-1}$ lorsque $2 \leq i \leq n$, et $f(e_1) = 0$ (il suffit de « lire » les colonnes de la matrice pour s'en rendre compte). On en déduit assez tranquillement que $f^2(e_2) = f(e_1) = 0$, $f^3(e_3) = f^2(e_2) = 0$ et ainsi de suite, jusqu'à avoir $f^n(e_n) = 0$ (encore une fois, une récurrence peut permettre d'être ultra rigoureux si on y tient). On a donc $f^n = 0$ (cette application s'annule sur tous les vecteurs de la base canonique), ce qui prouve que $J_n^n = 0$ et donc que J_n est nilpotente. Par ailleurs, $f^{n-1}(e_n) = e_1 \neq 0$, donc $f^{n-1} \neq 0$ et $J_n^{n-1} \neq 0$. L'indice de nilpotence de la matrice J_n est donc tout bêtement égal à n (on pouvait aussi écrire explicitement les puissances de la matrice J_n).

II. Calcul de Vect(N_n).

1. (a) Histoire de simplifier la rédaction, traitons par exemple le cas $n = 3$. On a donc $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, et en posant $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, on calcule $DA = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix}$, et $AD = \begin{pmatrix} a & 2b & 3c \\ d & 2e & 3f \\ g & 2h & 3i \end{pmatrix}$. Pour que ces matrices soient égales, on doit donc avoir $b = c = d = f = g = h = 0$, autrement dit A doit être une matrice diagonale. On généralise facilement ce résultat dans E_n : DA est obtenu à partir de A en multipliant la i -ème ligne de la matrice par i , et AD en multipliant la j -ème colonne. Les deux matrices sont donc égales si tous les coefficients de la matrice vérifient $ia_{ij} = ja_{ij}$, ce qui impose $a_{ij} = 0$ dès que $i \neq j$ (et bien sûr, la condition est toujours vérifiée pour $i = j$). Le noyau de f est donc l'ensemble des matrices diagonales de E_n , qui est un sous-espace vectoriel de dimension n .
- (b) D'après le calcul précédent, on a $f(A) = (ia_{i,j} - ja_{i,j})$, qui est une matrice à diagonale nulle. Or, l'ensemble des matrices à diagonale nulle est un sous-espace de dimension $n^2 - n$.

dans E_n , et le théorème du rang nous assure que $\dim(\text{Im}(f)) = n^2 - n$. Les deux sous-espaces sont donc confondus.

2. (a) Si la famille est liée, c'est que les deux vecteurs sont proportionnels, donc il existe bien un réel λ_u tel que $f(u) = \lambda_u u$ (le fait qu'on ait supposé u non nul est tout de même indispensable pour affirmer cela). Et ce réel est évidemment unique puisqu'on ne peut pas avoir $\lambda u = \mu u$ si λ et μ sont deux réels différents.
- (b) Il s'agit en fait de prouver que, quels que soient les vecteurs non nuls u et v , on aura toujours $\lambda_u = \lambda_v$ (en notant λ ce réel commun à tous les vecteurs, on aura alors $f = \lambda id$). Si u et v sont colinéaires, c'est évident : on peut écrire $v = ku$ pour un certain réel k , donc $f(v) = f(ku) = kf(u) = k\lambda_u u = \lambda_u v$, ce qui prouve que $\lambda_u = \lambda_v$ par unicité du coefficient. Si u et v ne sont pas colinéaires, on calcule $f(u+v) = f(u) + f(v) = \lambda_u f(u) + \lambda_v f(v)$. Par ailleurs, on doit aussi avoir $f(u+v) = \lambda_{u+v}(u+v)$. En comparant les deux écritures, on en déduit que $(\lambda_{u+v} - \lambda_u)u + (\lambda_{u+v} - \lambda_v)v = 0$. Or, la famille étant supposée libre, cela implique la nullité des deux coefficients, donc $\lambda_u = \lambda_v = \lambda_{u+v}$, ce qui achève notre démonstration. Cette question est un exercice hyper classique que vous reverrez sans l'ombre d'un doute l'an prochain en cours.
3. (a) Lorsque $n = 1$, la seule matrice appartenant à H_n est la matrice nulle (à un seul coefficient), qui est évidemment semblable à une matrice de diagonale nulle puisqu'elle est elle-même de diagonale nulle.
- (b) Là encore, c'est complètement débile : la seule homothétie ayant une matrice représentative de trace nulle est l'application nulle (la matrice représentative de l'homothétie de rapport λ dans toute base de \mathbb{R}^n étant la matrice λI_n), qui est de diagonale nulle (et bien sûr semblable à elle-même).
- (c) On utilise la contraposée du résultat démontré en question 2 : toute application pour laquelle $(u, f(u))$ est toujours liée est une homothétie, donc toute application qui n'est pas une homothétie envoie au moins un vecteur u sur une image $\hat{A}(u)$ qui ne lui est pas colinéaire. En notant X le vecteur colonne correspondant, la famille (X, AX) sera donc libre.
- (d) On complète tout simplement la famille libre $(u, \hat{A}(u))$ (où u est le vecteur obtenu à la question précédente) en une base de \mathbb{R}^n , ce qu'on peut faire d'après le théorème de la base incomplète. Dans cette base, la première colonne de la matrice représentative de \hat{A} sera celle attendue (l'image du premier vecteur de cette base est par construction égale au deuxième vecteur de la base). Et comme la trace est invariante par similitude, la matrice dans cette base aura toujours une trace nulle, ce qui impose $A' \in H_n$ puisque le premier coefficient diagonal de notre matrice est nul.
- (e) Par hypothèse de récurrence, la matrice A est semblable à une matrice de diagonale nulle. Autrement dit, on peut trouver une matrice inversible $P \in E_n$ telle que $P^{-1}A'P$ soit

une matrice de diagonale nulle. On pose alors $\tilde{P} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & P \end{array} \right)$. Les formules de

calcul matriciel par blocs permettant alors d'affirmer que \tilde{P} est inversible, avec $\tilde{P}^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & P^{-1} \end{array} \right)$. En notant M la matrice obtenue à la question précédente, un calcul

de produit par blocs montre alors que $\tilde{P}^{-1}MP$ a un coefficient « en haut à gauche » qui est nul, et un bloc « en bas à droite » égal à $P^{-1}A'P$, donc de diagonale nulle. La matrice

$\tilde{P}^{-1}MP$ est donc une matrice de diagonale, et comme elle est semblable à M qui est elle-même semblable à A , on a prouvé que A était semblable à une matrice de diagonale nulle.

4. La formule $\text{Tr}(BC) = \text{Tr}(CB)$ permet de voir immédiatement qu'un commutateur est une matrice de trace nulle. Réciproquement, si $A \in H_n$, alors A est semblable à une matrice de diagonale nulle (question 3), qui peut elle-même s'écrire comme un commutateur (question 1). Autrement dit, on a $P^{-1}AP = BC - CB$ pour une certaine matrice inversible P . Mais dans ce cas, $A = PBCP^{-1} - PCBP^{-1} = (PBP^{-1})(PCP^{-1}) - (PCP^{-1})(PBP^{-1})$, donc A est un commutateur. On a bien équivalence entre les deux propriétés.
5. La réciproque du résultat démontré en question 3 est triviale : si A est semblable à une matrice de diagonale nulle, donc de trace nulle, alors par invariance de la trace par similitude, $A \in H_n$. Il faut donc prouver que toute matrice nilpotente est semblable à une matrice de diagonale nulle pour en déduire que $N_n \subset H_n$. L'inclusion $\text{Vect}(N_n) \subset H_n$ est alors immédiate puisque par définition $\text{Vect}(N_n)$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant N_n (au sens de l'inclusion), et que H_n est donc aussi un sous-espace vectoriel contenant N_n .

Montrons donc cette similitude par récurrence sur n (j'ai l'impression qu'il devrait y avoir plus simple, mais je ne vois pas quoi au moment où je tape ce corrigé). Si $n = 1$, la seule matrice nilpotente est la matrice nulle, donc c'est trivial. Supposons le résultat vrai au rang n , et considérons une matrice $A \in N_{n+1}$. La matrice A ne pouvant pas être inversible, son noyau contient des vecteurs non nuls. On en choisit un, on le complète en une base de \mathbb{R}^{n+1} , et on

obtient une matrice représentative de \hat{A} dans cette base de la forme $\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array} \right)$, avec

B qui est elle-même une matrice nilpotente dans E_n (le calcul matriciel par blocs imposant que la matrice A^p ayant la même structure par blocs que A , avec une colonne de zéros à gauche et la matrice B^p dans le coin bas droite). Par hypothèse de récurrence, B est semblable à une matrice de diagonale nulle, et A aussi (si on effectue le changement de base correspondant pour B , et qu'on ajoute une colonne initiale contenant un 1 suivi de 0 à la matrice de passage correspondante, on conservera pour A une première colonne nulle, c'est le même principe qu'à la question 2.e), ce qui prouve l'hérédité de notre récurrence. En fait, avec un peu de motivation, on peut montrer plus fort : toute matrice nilpotente est semblable à une matrice obtenue en juxtaposant des blocs diagonaux égaux à des matrices J_k (définies à la fin de la première partie du problème), tous les autres blocs étant nuls.

6. (a) On peut écrire n'importe quelle matrice comme somme d'une matrice diagonale et d'une matrice de diagonale nulle (il suffit d'isoler la diagonale du reste de la matrice). Dans notre cas, la matrice à diagonale nulle aura bien sûr une trace nulle, donc la partie diagonale aussi puisque A est supposée de trace nulle.
- (b) Un calcul immédiat montre que, $E_{i,i}^2 = E_{i,i}$. La matrice $E_{i,j}$ ne peut donc pas être nilpotente lorsque $i = j$ (c'est en fait une matrice de projection dans ce cas). Par contre, si $i \neq j$, on a directement $E_{i,j}^2 = 0$, donc la matrice est nilpotente (si on ne veut pas faire de calcul matriciel, on passe par l'endomorphisme associé f dans la base canonique (e_1, \dots, e_n) : les vecteurs de la base autres que e_j ont une image nulle par f , et donc par f^2 , et $f^2(e_j) = f(e_i) = 0$ puisque $i \neq j$, ce qui prouve que $f^2 = 0$).
- (c) On a déjà calculé les carrés des matrices élémentaires à la question précédente. De plus, $E_{i,j} \times E_{k,l}$ est nul quand $j \neq k$, et égal à $E_{i,l}$ si $j = k$ (là encore, le plus simple pour le prouver est de passer par les endomorphismes si on ne veut pas passer par un calcul fastidieux avec de grosses matrices remplies de 0). On en déduit, en développant brutalement que $(E_{i,i} + E_{i,j} - E_{j,i} - E_{j,j})^2 = E_{i,i} + E_{i,j} - E_{i,i} - E_{i,j} - E_{j,i} - E_{j,j} + E_{j,i} + E_{j,j} = 0$

(les huit autres termes du développements sont nuls). On peut donc écrire $E_{i,i} - E_{j,j} = (E_{i,i} + E_{i,j} - E_{j,i} - E_{j,j}) - E_{i,j} + E_{j,i}$, qui est une somme de trois matrices nilpotentes d'après les deux derniers calculs effectués. On a donc bien $E_{i,i} - E_{j,j} \in \text{Vect}(N_n)$.

- (d) Une matrice de diagonale nulle est combinaison linéaire de matrices $E_{i,j}$ avec $i \neq j$, donc somme de matrices nilpotentes, ce qui prouve que $B \in \text{Vect}(N_n)$. Pour la matrice D qui est diagonale à trace nulle, notons d_1, d_2, \dots, d_n ses coefficients diagonaux, de façon à avoir $D = d_1 E_{1,1} + d_2 E_{2,2} + \dots + d_n E_{n,n} = \sum_{i=1}^n d_i E_{i,i}$. Comme la trace de la matrice est nulle, $\sum_{i=1}^n d_i = 0$, donc $d_n = -\sum_{i=1}^{n-1} d_i$. On peut donc écrire $D = \sum_{i=1}^{n-1} d_i E_{i,i} - \sum_{i=1}^{n-1} d_i E_{n,n} = \sum_{i=1}^{n-1} d_i (E_{i,i} - E_{n,n})$. La matrice D est donc elle aussi combinaison linéaire de matrices nilpotentes (cf question c), et appartient également à $\text{Vect}(N_n)$.
- (e) La matrice A est somme de deux matrices appartenant à $\text{Vect}(N_n)$, donc appartient elle-même à $\text{Vect}(N_n)$. Autrement dit, on a prouvé que $H_n \subset \text{Vect}(N_n)$. La réciproque ayant été démontrée en question 5, on peut conclure que $\text{Vect}(N_n) = H_n$.

III. Théorème de Gerstenhaber-Serežkin.

1. Tous ces résultats sont assez évidents et ont déjà été évoqués en cours : la stabilité par somme et par produit par une constante de chacun des trois sous-ensembles est triviale, donc ce sont des sous-espaces vectoriels. Pour déterminer leur dimension, il suffit de compter le nombre de coefficients non nuls dans les matrices de chaque type. On obtient aisément $\dim(T_n^+) = \dim(T_n^-) = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(T_n^{++}) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$. Si on veut être plus rigoureux, on exploite les matrices élémentaires déjà utilisées en partie II : la famille $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ est une base de T_n^+ de façon évidente, et elle est constituée de $\frac{n(n+1)}{2}$ matrices. De même, $(E_{i,j})_{1 \leq j \leq i \leq n}$ est une base de T_n^- , et $(E_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$ est une base de T_n^{++} .
2. On va éviter de rédiger une récurrence formelle trop laide : dans la ligne numéro i d'une matrice $A \in T_n^{++}$, les i premiers coefficients sont tous nuls. Si on multiplie une telle ligne par un vecteur colonne dont les $n-i$ derniers coefficients (au moins) sont nuls, on va donc obtenir 0. Si $X \in V_k$, la k -ème coordonnée de AX va donc être nulle, ainsi que toutes les suivantes (pour lesquelles on a « trop de zéros » dans X), ce qui revient bien à dire que $AX \in V_{k-1}$. Par une récurrence triviale, on aura systématiquement $A^n X = 0$ quel que soit le vecteur initial (tout vecteur appartient à l'ensemble V_n , donc $A^n X$ appartient à V_0 , qui ne contient que le vecteur nul), donc $A^n = 0$.
3. Si une matrice est triangulaire supérieure, toutes ses puissances sont triangulaires supérieures, avec des coefficients diagonaux de la forme $a_{i,i}^p$ (c'est du cours). Si l'un des coefficients $a_{i,i}$ est non nul, ce sera aussi le cas de toutes ses puissances, donc on n'aura jamais $A^p = 0$ et la matrice A ne peut pas être nilpotente. Par contraposée, les seules matrices nilpotentes de T_n^+ sont celles à diagonale nulle, donc celles appartenant à T_n^{++} .
4. L'intersection des deux sous-espaces est trivialement réduite à 0, et la somme de leurs dimensions vaut $\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2 = \dim(E_n)$, donc T_n^{++} et T_n^- sont supplémentaires.
5. On a prouvé dans le II que les matrices nilpotentes avaient une trace nulle. C'est évidemment le cas aussi de leurs puissances, qui sont elles-mêmes nilpotentes. Ainsi, avec les hypothèses données, $\text{Tr}((A+B)^2) = 0$. Par linéarité de la trace, on a donc $\text{Tr}(A^2) + \text{Tr}(AB) + \text{Tr}(BA) + \text{Tr}(B^2) = 0$. Or, $\text{Tr}(A^2) = \text{Tr}(B^2) = 0$ et $\text{Tr}(BA) = \text{Tr}(AB)$, on en déduit facilement que $AB \in H_n$.

6. (a) D'après la question 4, les sous-espaces T_n^- et T_n^{++} sont supplémentaires, donc $\dim(F) = \dim(F \cap T_n^-) + \dim(F \cap T_n^{++})$. Or, $p(F) = F \cap T_n^{++}$ (si vous n'êtes pas convaincu, décomposez une matrice $A \in F$ comme somme d'une matrice de T_n^- et d'une matrice de T_n^{++} , chacune de ces deux matrices appartient aussi à F , et l'image de F par la projection est la seconde matrice), l'égalité demandée en découle.
- (b) L'application τ étant une bijection (elle est sa propre réciproque), on a bien entendu $\dim(\tau(F \cap T_n^-)) = \dim(F \cap T_n^-)$.
- (c) C'est évident pour $p(F)$. De plus, une matrice appartenant à la fois à T_n^- et à $F \subset N_n$ est nécessairement triangulaire inférieure stricte (démonstration identique à celle effectuée en question 3 pour les matrices triangulaires supérieures), donc sa transposée est bien triangulaire supérieure stricte.
7. (a) Comme on l'a vu en cours dans le chapitre 26, le calcul de la trace du produit $A^\top B$ revient simplement à faire la somme des produits des coefficients en position identique dans les matrices A et B . Or, ici, A^\top est une matrice triangulaire inférieure, et B une matrice triangulaire supérieure stricte. Les produits de coefficients en même position seront donc tous nuls, et $A^\top B \in H_n$.
- (b) Il n'y a rien à prouver sur A , on l'a déjà fait en question 6.c. De plus, si $A = p(B)$, la partie « triangulaire supérieure stricte » des matrices A et B est identique (la projection en question consiste exactement à remplacer tous les coefficients de la diagonale et ceux situés sous la diagonale par des 0). La différence $C = B - A$ a donc des coefficients tous nuls au-dessus de la diagonale. Autrement dit, elle est triangulaire inférieure, et sa transposée est donc bien triangulaire supérieure.
- (c) Par définition, $C^\top A = B^\top A - A^\top A$. Or, $B^\top A$ est la transposée de $A^\top B$ qui a une trace nulle. On en déduit que $\text{Tr}(A^\top A) = 0$, ce qui revient exactement à dire que la somme des carrés des coefficients de la matrice A est nulle. Ce n'est possible que si tous ces coefficients sont nuls, donc si $A = 0$. On a prouvé que les deux sous-espaces de T_n^{++} égaux à $\tau(F \cap T_n^-)$ et à $p(F)$ étaient en somme directe.
8. La question précédente prouve que la somme des dimensions des deux espaces ne peut pas dépasser la dimension de T_n^{++} , qui est égale à $\frac{n(n-1)}{2}$. Comme cette somme est égale à $\dim(F)$ (question 6.b), cela achève effectivement la démonstration du théorème.