Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 10 : sujet A (sujet difficile)

MPSI Lycée Camille Jullian

6 juin 2026

Ce sujet est constitué de deux problèmes indépendants, l'un d'analyse et l'autre d'algèbre. Il est assurément **beaucoup trop long** pour être traité en quatre heures, mais je ne voulais pas me contenter de vous poser un sujet de devoir bilan entièrement centré sur l'algèbre ou sur l'analyse (aux concours, vous aurez la plupart du temps deux épreuves de mathématiques, chacune d'entre elles centrée sur un thème général du programme). Le problème d'algèbre à lui seul suffirait à vrai dire à constituer une bonne épreuve d'au moins quatre heures, mais j'aimerais pouvoir vous évaluer également sur l'analyse. C'est pourquoi je vous demande de traiter au moins la moitié du problème d'analyse sur votre copie avant de vous concentrer éventuellement plus longuement sur celui d'algèbre.

Problème 1 (analyse) : étude d'une famille d'intégrales.

Le but de ce problème est de calculer des intégrales du type $I_{n,k} = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^k)^n}\,dx$, avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. En particulier, on constatera en cours de route qu'on sait calculer toutes les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$, qui jouent un rôle central dans la méthode de calcul des intégrales de fractions rationnelles via décomposition en éléments simples.

I. Calcul de quelques valeurs particulières.

1. Calculer $I_{0,k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer $I_{n,1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer $I_{1,2}$, puis $I_{2,2}$ (pour cette dernière, il est conseillé d'effectuer une IPP « inutile » à partir de $I_{1,2}$ pour faire apparaitre l'intégrale $I_{2,2}$).
4. Après avoir effectué une décomposition en éléments simples de la fraction $F = \dfrac{1}{X^3+1}$, montrer que $I_{1,3} = \dfrac{1}{3}\ln(2) + \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
5. Préciser la monotonie de la suite $(I_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$, en déduire sa convergence (ici, l'entier k est donc fixé). Donner la limite et un équivalent simple de $I_{n,1}$ quand n tend vers $+\infty$.

II. Une relation de récurrence.

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $J_{n,k} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^k}{(1+x^k)^n}\,dx$.

1. Trouver une relation entre les intégrales $I_{n,k}$, $I_{n+1,k}$ et $J_{n+1,k}$.
2. À l'aide d'une IPP, montrer que, si $n \geqslant 1$, alors $J_{n+1,k} = -\dfrac{1}{kn2^n} + \dfrac{1}{kn}I_{n,k}$.
3. En déduire une relation de récurrence entre $I_{n+1,k}$ et $I_{n,k}$.
4. Retrouver à l'aide de cette relation (et de la valeur de $I_{1,2}$ calculée plus haut) la valeur de $I_{2,2}$, puis calculer $I_{3,2}$.

III. Fonctions définies par une intégrale.

Après avoir fixé $x \in [0,1]$, on définit une fonction de la variable y par $f_x(y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$, puis on pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $F_n(y) = \displaystyle\int_0^1 f_x(y)^n \, dx = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+y^2)^n} \, dx$. La notation $f_x'(y)$ employée ensuite désignera donc une dérivation par rapport à la variable y, x étant considéré comme constant dans cette partie.

1. Justifier que la fonction F_n est bien définie sur $]0,+\infty[$.
2. Donner une expression explicite de $F_1(y)$.
3. **Question technique et particulièrement délicate, on pourra admettre le résultat pour traiter la dernière question si on le souhaite.**
   (a) On pose $g_n(y) = (f_x(y))^n$, et h un réel vérifiant $|h| < \dfrac{y}{2}$, avec $y > 0$.
   Montrer que $\left| \dfrac{g_n(y+h) - g_n(y)}{h} - g_n'(y) \right| \leqslant \dfrac{|h|}{2} M(y)$, où M est une fonction de la variable y indépendante de h (on pourra commencer par majorer g_n'' entre y et $y+h$, puis appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange).
   (b) En intégrant l'inégalité précédente, en déduire que F_n est dérivable sur $]0,+\infty[$, et que $F_n'(y) = -2nyF_{n+1}(y)$.
4. Calculer à l'aide de la relation précédente $F_2(y)$ puis $F_3(y)$, et retrouver la valeur de $I_{3,2}$.

Problème 2 (algèbre) : matrices nilpotentes.

Dans tout ce problème, E_n désigne l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, H_n désigne le sous-ensemble de E_n constitué des matrices de trace nulle, et N_n désigne l'ensemble des matrices nilpotentes (on rappelle qu'une matrice $M \in E_n$ est nilpotente s'il existe un entier naturel $p \geqslant 1$ tel que $M^p = 0$). Il est tout à fait autorisé de prendre un point de vue « applications linéaires » plutôt qu'un point de vue matriciel pour traiter certaines questions du problème. Si c'est le cas, on pourra évidemment adopter les adaptations de vocabulaires vues en cours, et parler par exemple de « morphisme de trace nulle » pour désigner un endomorphisme dont la matrice dans n'importe quelle base de $\mathbb{R}^n$ a une trace nulle.

I. Généralités sur H_n et N_n.

1. Montrer que H_n est un sous-espace vectoriel de E_n, et préciser sa dimension. Donner une base de H_2.
2. L'ensemble H_n est-il stable par produit matriciel ? Montrer que, si $AB \in H_n$, alors $BA \in H_n$.
3. Si A est une matrice inversible appartenant à H_n, son inverse A^{-1} appartient-elle nécessairement à H_n ?
4. À l'aide d'un contre-exemple, prouver que N_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de E_2 (on admet plus généralement que N_n n'est pas un sous-ev de E_n si $n \geqslant 2$). Montrer par contre que la somme de deux matrices nilpotentes qui commutent reste nilpotente.
5. L'ensemble N_n est-il stable par produit ? Montrer que le produit d'une matrice nilpotente par n'importe quelle matrice commutant avec elle reste nilpotent.
6. Montrer que, si $A \in N_n$, alors $I_n - A$ est une matrice inversible (et donner une expression de son inverse). On pourra commencer par prouver que, si $A^2 = 0$, alors $I_n - A$ a pour inverse $I_n + A$.

7. Montrer que, si A et B sont deux matrices telles que $AB \in N_n$, alors BA est aussi nilpotente.
8. Si $A \in N_n$, on appelle **indice de nilpotence** de A l'entier $p = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid A^k = 0\}$. Montrer qu'il existe alors un vecteur-colonne X tel que $A^{p-1}X \neq 0$, puis que la famille $(X, AX, A^2X, \dots, A^{p-1}X)$ est une famille libre. En déduire que $p \leqslant n$.
9. Montrer que la matrice $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente, et déterminer son indice de nilpotence.

II. Calcul de $\mathrm{Vect}(N_n)$.

Un **commutateur** dans E_n est une matrice A pouvant s'écrire sous la forme $A = BC - CB$, avec $(B, C) \in E_n^2$. On démontre d'abord dans cette partie que A est un commutateur si et seulement si $A \in H_n$, puis on montre que $\mathrm{Vect}(N_n) = H_n$.

1. Soit D la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & n \end{pmatrix}$, et f l'endomorphisme de E_n défini par $f(A) = DA - AD$.
   (a) Déterminer le noyau de f, et préciser sa dimension.
   (b) En déduire que $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble des matrices de diagonale nulle dans E_n.
2. Soit E un espace vectoriel quelconque et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que $\forall u \in E$, la famille $(u, f(u))$ est une famille liée.
   (a) Montrer que, $\forall u \in E \backslash \{0\}$, $\exists! \lambda_u \in \mathbb{R}$, $f(u) = \lambda_u u$.
   (b) Montrer que f est nécessairement une homothétie (on pourra comparer les valeurs de λ_u, λ_v et λ_{u+v} pour deux vecteurs u et v de l'espace E).
3. On va montrer dans cette question que toute matrice de H_n est semblable à une matrice de diagonale nulle. On va procéder pour cela par récurrence sur n.
   (a) Montrer le résultat quand $n = 1$.
   (b) On suppose le résultat vrai au rang n, et on fixe $A \in H_{n+1}$. On note $\hat{A}$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A. Démontrer le résultat attendu quand $\hat{A}$ est une homothétie.
   (c) Si $\hat{A}$ n'est pas une homothétie, montrer qu'il existe un vecteur-colonne X tel que la famille (X, AX) est libre.
   (d) En déduire que, dans une certaine base, $\hat{A}$ a une matrice de la forme suivante, avec $A' \in H_n$: $\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \star & \dots & \star \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right)$, où le symbole $\star$ désigne un coefficient réel quelconque.
   (e) Conclure la récurrence.
4. Démontrer le premier résultat annoncé en préambule de cette partie : A est un commutateur si et seulement si $A \in H_n$.

5. Montrer que $N_n \subset H_n$ (on pourra montrer par récurrence sur n que toute matrice nilpotente est semblable à une matrice de diagonale nulle), en déduire que $\mathrm{Vect}(N_n) \subset H_n$.
6. On suppose que $A \in H_n$.
   (a) Montrer que $A = B + D$, où B est une matrice de diagonale nulle, et D une matrice diagonale de trace nulle.
   (b) Montrer que $E_{i,j}$ (matrice élémentaire ayant un seul coefficient non nul, égal à 1 en position (i,j)) appartient à N_n si et seulement si $i \neq j$.
   (c) Montrer que, si $i \neq j$, $(E_{i,i} + E_{i,j} - E_{j,i} - E_{j,j})^2 = 0$. En déduire que, si $i \neq j$, $E_{i,i} - E_{j,j} \in \mathrm{Vect}(N_n)$.
   (d) Montrer que les matrices B et D appartiennent toutes les deux à $\mathrm{Vect}(N_n)$.
   (e) Conclure.

III. Théorème de Gerstenhaber-Serežkin.

Ce théorème, dont je refuse d'écrire une deuxième fois le nom, stipule que tout sous-espace vectoriel de E_n inclus dans N_n est de dimension inférieure ou égale à $\dfrac{n(n-1)}{2}$. Nous allons le démontrer dans cette dernière partie, qui est honnêtement plutôt donnée en guise de complément à explorer chez vous pour continuer à travailler le sujet de ce devoir.

On note dans cette partie T_n^+ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures dans E_n (et T_n^- les matrices triangulaires inférieures), et T_n^{++} l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes (à diagonale nulle donc).

1. Montrer que T_n^+, T_n^- et T_n^{++} sont des sous-espaces vectoriels de E_n, et préciser leur dimension.
2. Si $k \leqslant n$, on note V_k l'ensemble des vecteurs-colonnes dont les $n-k$ dernières coordonnées sont nulles. Soit $A \in T_n^{++}$. Montrer que, $\forall X \in V_k$, $AX \in V_{k-1}$, puis en déduire que $A^n = 0$.
3. Montrer que les matrices appartenant à T_n^{++} sont les seules matrices nilpotentes de T_n^+.
4. Montrer que T_n^{++} et T_n^- sont supplémentaires dans E_n.
5. Soient $(A,B) \in E_n^2$, montrer que, si A, B et $A+B$ sont nilpotentes, alors $AB \in H_n$.
6. Soit F un sous-espace vectoriel de E_n inclus dans N_n. On note p la projection sur T_n^{++} parallèlement à T_n^-, et τ l'endomorphisme de transposition dans E_n défini par $\tau(A) = A^\top$.
   (a) Montrer que $\dim(F) = \dim(F \cap T_n^-) + \dim(p(F))$.
   (b) En déduire que $\dim(F) = \dim(\tau(F \cap T_n^-)) + \dim(p(F))$.
   (c) Montrer que $\tau(F \cap T_n^-)$ et $p(F)$ sont inclus dans T_n^{++}.
7. Soit $A \in \tau(F \cap T_n^-) \cap p(F)$, et $B \in F$ telle que $A = p(B)$. On pose $C = B - A$.
   (a) Montrer que $A^\top B \in H_n$.
   (b) Montrer que $A \in T_n^{++}$, puis que $C^\top \in T_n^+$ et enfin que $C^\top A \in H_n$.
   (c) En déduire que $A = 0$. Qu'a-t-on montré à l'issue de cette question ?
8. Terminer la démonstration du théorème de Gerstenhaber-Serežkin.