

# Devoir Maison n° 9 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

30 mars 2026

## Problème : autour des nombres de Bernoulli.

### A. Polynômes et nombres de Bernoulli.

1. Tout polynôme admet des primitives qui sont également des polynômes. Notons  $Q_0$  une de ces primitives, on sait que toutes les autres primitives de  $P$  seront de la forme  $Q_0 + k$ . Or, la condition supplémentaire  $\int_0^1 Q(x) dx$  impose  $\int_0^1 Q_0(x) + k dx = 0$ , soit  $k = -\int_0^1 Q_0(x) dx$ , ce qui impose une et une seule valeur possible pour  $k$ , et prouve donc à la fois l'existence et l'unicité du polynôme  $Q$ . L'existence et l'unicité de tous les polynômes de la suite  $(B_n)$  en découlent par récurrence triviale (le produit par  $n+1$  ne changeant rien au fait qu'on travaille avec des polynômes à chaque étape).
2. On doit avoir  $B'_1 = B_0 = 1$ , donc  $B_1$  est de la forme  $B_1 = X + k$ , et la condition sur l'intégrale impose  $k = -\int_0^1 x dx = -\frac{1}{2}$ , donc  $B_1 = X - \frac{1}{2}$ . Ensuite, on a  $B'_2 = 2B_1 = 2X - 1$ , donc  $B_2 = X^2 - X + k$ , avec  $k = -\int_0^1 x^2 - x dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ , donc  $B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}$ . Toujours le même principe pour le dernier calcul :  $B'_3 = 3B_2 = 3X^2 - 3X + \frac{1}{2}$ , donc  $B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + k$ , avec  $k = \int_0^1 -x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x dx = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0$ . On a donc simplement  $B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$ .

Il semble assez clair que le polynôme  $B_n$  sera toujours de degré  $n$  et de coefficient dominant 1, ce qu'on prouve par une récurrence essentiellement triviale : c'est vrai pour  $B_0 = 1$ , et si on le suppose vrai pour  $B_n$ , alors  $B'_{n+1}$  est de degré  $n$  et de coefficient dominant  $n+1$ , ce qui donne bien un degré  $n+1$  et un coefficient dominant 1 pour  $B_{n+1}$  (bien sûr, le calcul de la constante  $k$  ensuite ne peut pas modifier ces données).

3. On a manifestement  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $b_2 = \frac{1}{6}$  et  $b_3 = 0$ .
4. Puisque les polynômes de Bernoulli sont définis par récurrence, on peut démontrer toutes leurs propriétés par récurrence (même si ici la formule de Taylor permet de faire une démonstration presque directe). Pour  $n = 0$ , la formule proposée se résume à  $B_0 = b_0 = 1$ , ce qui est vrai. Supposons la formule vraie au rang  $n$ , alors  $B'_{n+1} = (n+1)B_n = \sum_{k=0}^n (n+1) \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$ . Si on « primitive » le monome  $(n+1) \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$ , on obtient  $\frac{n+1}{k+1} b_{n-k} X^{k+1}$ . Or,  $b_{n-k} = b_{(n+1)-(k+1)}$  et surtout, en exploitant la formule sans nom,  $\frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ , ce qui

permet donc d'écrire que  $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} b_{n+1-(k+1)} X^{k+1} + \alpha = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_{n+1-k} X^k + \alpha$  après un petit décalage d'indice. La constante d'intégration  $\alpha$  n'a pas besoin d'être calculée, elle est égale à  $B_{n+1}(0)$  et donc à  $b_{n+1}$  par définition de ce dernier. Ça tombe bien, ça permet de compléter la somme (il manquait le terme d'indice 0 qui devait justement être égal à  $b_{n+1}$ ) et d'obtenir  $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_{n+1-k} X^k$ , soit exactement la formule attendue pour prouver notre hérédité et achever la récurrence.

5. Puisque les conditions imposées en préambule imposent la suite  $(B_n)$  de façon unique, il suffit de vérifier que la suite  $(C_n)$  les vérifie aussi pour montrer que  $C_n = B_n$ . On constate pour commencer que  $C_0 = B_0(1-x) = B_0 = 1$ . Ensuite, par dérivation directe,  $C'_{n+1} = (-1)^{n+1} \times (-1) \times B'_{n+1}(1-X) = (-1)^n(n+1)B_n(1-X) = (n+1)C_n$ , donc la relation de récurrence reste la même. Enfin, avec un bête changement de variable  $t = 1-x$ , on calcule  $\int_0^1 C_n(x) dx = (-1)^n \int_0^1 B_n(1-x) dx = (-1)^n \int_1^0 -B_n(t) dt$ , qui vaut bien sûr 0 (les divers changements de signe n'affectent pas cette valeur). Tout fonctionne, la suite  $(C_n)$  est bien la même que la suite  $(B_n)$ . Lorsque  $n = 2k+1$ , on a donc  $B_{2k+1}(x) = -B_{2k+1}(1-x)$ . Pour  $x = \frac{1}{2}$ , la relation devient  $B_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = -B_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right)$ , qui impose évidemment  $B_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ .
6. On peut à nouveau prouver que l'expression censée être égale à  $B_n$  vérifie les trois conditions caractérisant la suite  $(B_n)$ . Déjà, pour  $n = 0$ ,  $2^{-1} \left( B_0 \left( \frac{X}{2} \right) + B_0 \left( \frac{X+1}{2} \right) \right) = \frac{1}{2}(1+1) = 1 = B_0$ . Ensuite, si on dérive l'expression de droite, on obtient  $2^{n-1} \left( \frac{1}{2} B'_n \left( \frac{X}{2} \right) + \frac{1}{2} B'_n \left( \frac{X+1}{2} \right) \right)$ , et les facteurs  $\frac{1}{2}$  de la dérivation de composée transforment le facteur  $2^{n-1}$  en  $2^{n-2}$ , ce qui permet d'obtenir la même relation de récurrence que pour la suite  $(B_n)$  (bien sûr, on récupère un facteur  $n+1$  dans chacun des deux termes de la parenthèse en dérivant). Enfin, il faut calculer  $\int_0^1 B_n \left( \frac{x}{2} \right) dx + \int_0^1 B_n \left( \frac{x+1}{2} \right) dx$  (le facteur  $2^{n-1}$  n'a ici aucun intérêt puisqu'on veut que ce calcul donne un résultat nul). On effectue dans la première intégrale un changement de variable  $t = \frac{x}{2}$  et dans la deuxième un changement de variable  $t = \frac{x+1}{2}$  (on aura dans les deux cas  $dx = 2 dt$  pour obtenir  $2 \int_0^{\frac{1}{2}} B_n(t) dt + 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 B_n(t) dt = 2 \int_0^1 B_n(t) dt = 0$  à l'aide de la relation de Chasles. À nouveau, tout fonctionne, ce qui prouve la formule annoncée par l'énoncé. Appliquée pour  $X = 0$ , la formule donne  $b_n = 2^{n-1} \left( b_n - B_n \left( \frac{1}{2} \right) \right)$ . Pour  $X = 1$ , on a cette fois-ci  $B_n(1) = 2^{n-1} \left( B_n \left( \frac{1}{2} \right) + B_n(1) \right)$ . L'identification des deux formules donne immédiatement  $B_n(1) = b_n$ . Par ailleurs, on a vu plus haut que  $B_{2k+1} \left( \frac{1}{2} \right) = 0$ , et dans ce cas la première formule (ou la deuxième) devient  $b_n = 2^{n-1} b_n$ , ce qui implique évidemment  $b_n = 0$  lorsque  $n \neq 1$  (donc  $k \neq 0$ ).

7. La relation démontrée à la question 4, évaluée pour  $X = 1$ , donne  $b_n = b_n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} b_{n-k}$ , donc

on a bien  $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} b_{n-k} = 0$ . En particulier, pour  $n = 5$ , on a  $5b_4 + 10b_3 + 10b_2 + 5b_1 + b_0 = 0$ , donc  $b_4 = -\frac{1}{5} \left( 0 + \frac{5}{3} - \frac{5}{2} + 1 \right) = -\frac{1}{5} \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{30}$ . On sait déjà que  $b_5 = 0$ , et on

applique donc la relation pour  $n = 7 : 7b_6 + 21b_5 + 35b_4 + 35b_3 + 21b_2 + 7b_1 + b_0 = 0$ , donc  $b_6 = -\frac{1}{7} \left( 0 - \frac{7}{6} + 0 + \frac{7}{2} - \frac{7}{2} + 1 \right) = \frac{1}{42}$ . Les nombres de Bernoulli sont définitivement magnifiques.

## B. Quelques calculs sympathiques de développements limités.

1. On sait (limite classique de taux d'accroissement) que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ , donc par simple passage à l'inverse  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ , ce qui assure la possibilité de prolonger par continuité, en posant  $f(0) = 1$ .
2. Pour effectuer le DL, on va avoir besoin d'effectuer une simplification par  $x$  pour faire apparaître une forme «  $1 + u$  » au dénominateur, ce qui impose de développer ce dénominateur à l'ordre 5 pour obtenir un DL à l'ordre 4 de  $f$ . On écrit donc

$$f(x) = \frac{x}{x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^4)}.$$

On pose alors  $u = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^4)$ , qui a une limite nulle quand  $x$  tend vers 0, et on aura  $f(x) = \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + o(u^4)$ . Dans les différents développements

à effectuer, on va conserver les termes suivants :  $u^2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{36}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{72}x^4 + o(x^4)$ ;  $u^3 = \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$ ; et  $u^4 = \frac{1}{16}x^4 + o(x^4)$ . On en déduit que  $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{120}x^4 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{72}x^4 - \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^4 + o(x^4) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + o(x^4)$ .

3. En posant  $i(x) = (e^x - 1)f(x)$ , on a effectivement, par définition,  $i(x) = x$ , donc  $i^{(n)}(x) = 0$  dès que  $n \geq 2$ . Or, en appliquant la formule de Leibniz,  $i^{(n)}(0) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(0)$ , puisque

le facteur  $e^x - 1$  a toutes ses dérivées égales à  $e^x$  (qui prend pour valeur 1 en  $x = 0$ ), sauf la « zéroième » qui s'annule en 0, d'où le fait que la somme démarre à  $k = 1$ . On obtient bien la formule de l'énoncé puisque  $f^{(n-k)}(0) = a_{n-k}$ .

4. On va faire comme si on n'avait pas reconnu la fonction tangente hyperbolique, et faire un calcul direct : la fonction est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $g'(x) = \frac{2e^{2x}(e^{2x} + 1) - 2e^{2x}(e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$ . De l'autre côté,  $1 - g^2(x) = \frac{(e^{2x} + 1)^2 - (e^{2x} - 1)^2}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{e^{4x} + 2e^{2x} + 1 - e^{4x} + 2e^{2x} - 1}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$ . L'égalité est bien vérifiée.

5. En dérivant  $n$  fois l'égalité de la question précédente,  $g^{(n+1)} = (g')^{(n)} = -(g^2)^{(n)}$  (pour  $n \geq 1$ , la constante 1 va disparaître en dérivant). Il suffit alors d'appliquer la formule de Leibniz au produit  $g \times g$  pour obtenir la somme de l'énoncé (en ajoutant évidemment les coefficients binômiaux oubliés dans l'énoncé).

6. En exploitant en cours de route la formule précédente,  $(n+1)c_{n+1} = (n+1) \frac{g^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} = -\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)}(0)g^{(n-k)}(0) = -\sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \frac{g^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} = -\sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}$ .

7. Calculons  $h(4x) - h(2x) = \frac{4x}{e^{4x} - 1} + 2x - \frac{2x}{e^{2x} - 1} - x$ . En se rendant compte que  $e^{4x} - 1 = (e^{2x} - 1)(e^{2x} + 1)$ , on simplifie :  $h(4x) - h(2x) = \frac{4x - 2x(e^{2x} + 1) + x(e^{4x} - 1)}{e^{4x} - 1} =$

$$\frac{x(1 - 2e^{2x} + e^{4x})}{e^{4x} - 1} = \frac{x(e^{2x} - 1)^2}{(e^{2x} + 1)(e^{2x} - 1)} = \frac{x}{e^{2x} + 1} = xg(x).$$

8. Puisque  $xg(x) = f(4x) - f(2x) + x$ , on peut effectuer un DL à l'ordre  $2n$  (oui, on a besoin d'aller jusque là pour retrouver la formule demandée) pour obtenir  $xg(x) = x + \sum_{k=0}^{2n} \frac{4^k}{k!} a_k x^k -$

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{2^k}{k!} a_k x^k + o(x^{2n}). \text{ Or, la fonction } g \text{ est impaire : } g(-x) = \frac{e^{-2x} - 1}{e^{-2x} + 1} = \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}} = -g(x).$$

Donc  $xg(x)$  a un DL qui ne fait intervenir que les puissances paires de  $x$  (même le  $x$  seul en dehors des sommes va se simplifier avec  $2a_1x$  au vu du début de DL de  $f(x)$  calculé plus haut).

$$\text{Quitte à renuméroter les termes, on en déduit que } xg(x) = \sum_{i=0}^n \frac{4^{2k} - 2^{2k}}{(2k)!} a_{2k} x^{2k} + o(x^{2n+1}).$$

Le terme numéro 0 de cette somme est nul, on peut le supprimer. Et comme  $4^{2k} - 2^{2k} = (4^k)^2 - 4^k = 4^k(4^k - 1)$ , en divisant par  $x$ , on tombe exactement sur la formule de l'énoncé.

Pour obtenir le DL demandé (à l'ordre 3), on calcule les deux premiers coefficients :  $\frac{a_2}{2!} 4^1(4^1 - 1) = \frac{1}{12} \times 4 \times 3 = 1$ , puis  $\frac{a_4}{4!} \times 4^2 \times (4^2 - 1) = -\frac{1}{720} \times 16 \times 15 = -\frac{1}{3}$ . On en déduit que  $g(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$  (ce qui est conforme à ce que prétend le cours pour la fonction).

### C. Application au développement limité de la fonction tangente.

1. Les deux suites vérifient la même relation de récurrence. Comme  $a_0 = b_0 = 1$ , une récurrence forte triviale (mais non, ce n'est pas contradictoire) permet de conclure (on a besoin d'une récurrence forte car la relation de récurrence permet d'obtenir la valeur de  $a_n$  ou de  $b_n$  connaissant **tous** les termes précédents de la suite).
2. Comme  $\tan' = 1 + \tan^2$ , c'est exactement le même raisonnement à base de formule de Leibniz que pour la question B.6.

Ensuite, on peut déjà signaler que  $\tan$  est une fonction impaire, comme  $g$ , donc  $d_{2k} = c_{2k} = 0$  pour tout entier naturel  $k$ . On va ensuite procéder par récurrence forte en exploitant la relation de récurrence. Au rang 1,  $d_1 = c_1 = 0$  (on connaît bien le début du développement limité

$$\text{de la fonction } \tan). \text{ Ensuite, on écrit } (2n + 1)d_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n} d_k d_{2n-k} = \sum_{i=0}^{n-1} d_{2i+1} d_{2n-2i-1} =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i c_{2i+1} (-1)^{n-i-1} c_{2n-2i-1} = (-1)^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} c_{2i+1} c_{2n-2i-1} = -(-1)^{-1} \times (2n + 1) x_{2n+1} = (-1)^n c_{2n+1}.$$

3. D'après ce qui précède,  $\tan(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} c_{2k-1} x^{2k-1} + o(x^{2k}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{b_{2k}}{(2k)!} 4^k (4^k - 1) x^{2k-1} + o(x^{2k})$  en exploitant les calculs précédents.