

Devoir Maison n° 9

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 30 mars 2026

Problème : autour des nombres de Bernoulli.

Les deux premières parties du problème sont complètement indépendantes (on peut donc commencer si on préfère par la deuxième partie, qui est plus calculatoire et donc probablement plus accessible). Les deux sont par contre indispensables pour traiter la partie C.

A. Polynômes et nombres de Bernoulli.

On définit la suite (B_n) des polynômes de Bernoulli de la façon suivante : $B_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $B'_{n+1} = (n+1)B_n$. De plus, on impose également que, $\forall n \geq 1$, $\int_0^1 B_n(x) dx = 0$.

1. Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, il existe un unique polynôme Q vérifiant à la fois $Q' = P$ et $\int_0^1 Q(x) dx = 0$. En déduire que les polynômes de la suite (B_n) sont bien définis de façon unique.
2. Calculer explicitement les polynômes B_1 , B_2 et B_3 . Déterminer plus généralement (en justifiant, bien entendu), le degré et le coefficient dominant du polynôme B_n .
3. On note maintenant $b_n = B_n(0)$, réel nommé n -ème nombre de Bernoulli. Préciser la valeur de b_0 , b_1 , b_2 et b_3 .
4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$.
5. On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$. Montrer rigoureusement que $C_n = B_n$, en déduire que $\forall k \in \mathbb{N}$, $B_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.
6. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n(X) = 2^{n-1} \left(B_n\left(\frac{X}{2}\right) + B_n\left(\frac{X+1}{2}\right) \right)$. En déduire que $b_n = B_n(1)$, et que b_{2k+1} est toujours nul quand $k \geq 1$.
7. Montrer la relation de récurrence $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} b_{n-k} = 0$. En déduire, sans calculer les polynômes correspondants, la valeur de b_4 puis celle de b_6 . Admirer en particulier le dénominateur de b_6 .

B. Quelques calculs sympathiques de développements limités.

On pose pour toute cette partie $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 (on notera toujours f la fonction prolongée).
2. Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction f .
3. On **admet** que f est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$ en 0 et admet donc toujours un développement limité à l'ordre n en 0, qu'on notera $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} x^k + o(x^n)$ (autrement dit, à l'aide de la formule de Taylor-Young, $a_k = f^{(k)}(0)$).

Montrer que $\forall n \geq 2, \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a_{n-k} = 0$ (on pourra exploiter l'égalité $x = (e^x - 1)f(x)$).

4. On note g la fonction définie par $g(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$. Montrer que g est solution de l'équation différentielle non linéaire $g' = 1 - g^2$.

5. Montrer que, $\forall n \geq 1, g^{(n+1)} = - \sum_{k=0}^n g^{(k)} g^{(n-k)}$.

6. En notant le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction g sous la forme $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n c_k x^k + o(x^n)$ (attention, cette fois-ci, le quotient par $k!$ est inclus dans le coefficient c_k),

montrer que $\forall n \geq 1, (n+1)c_{n+1} = - \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}$.

7. On introduit enfin une fonction h définie par $h(x) = f(x) + \frac{x}{2}$. Montrer que $h(4x) - h(2x) = xg(x)$.

8. Montrer que $\forall n \geq 1, g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n \frac{a_{2k}}{(2k)!} 4^k (4^k - 1) x^{2k-1} + o(x^{2n})$. Écrire en particulier le développement limité à l'ordre 3 de la fonction g en 0.

C. Application au développement limité de la fonction tangente.

Les suites notées (a_n) , (b_n) et (c_n) dans cette troisième partie sont celles qui ont été introduites dans les deux parties précédentes.

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = a_n$.
2. En notant d_k les coefficients du développement limité en 0 de la fonction tangente (autrement dit, on aura $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n d_k x^k + o(x^n)$), montrer que $\forall n \geq 1, (n+1)d_{n+1} = \sum_{k=0}^n d_k d_{n-k}$.
En déduire que $\forall n \geq 1, d_{2n-1} = (-1)^{n-1} c_{2n-1}$.
3. Exprimer le développement limité à l'ordre $2n$ de la fonction tangente en 0 en fonction des nombres de Bernoulli b_k .