

Devoir Maison n° 6 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

5 janvier 2026

Énigme 1 : le repas de Noël.

Il va évidemment falloir quelques connaissances en dénombrement pour s'en sortir. Supposons pour simplifier dans un premier temps que les places autour de la table sont numérotées de 1 à 45 (avec donc la place 45 qui est en fait à côté de la place 1. Le nombre de façons de placer les six filles sur ces 45 places (si on considère que tout ce qui est important est de savoir où sont placées les filles, indépendamment de la place précise de chaque fille) est de $\binom{45}{6} = 8\,145\,060$. On va essayer de compter, parmi ceux-ci, les placements où il n'y a **pas** deux filles l'une à côté de l'autre. Si c'est le cas, on peut effectuer la drôle d'opération suivante : on ne bouge pas la première fille (celle dont le numéro de place est le plus petit), on déplace d'une unité (vers le bas) la deuxième fille, de deux unités la troisième, ainsi de suite jusqu'à déplacer de cinq unités la sixième et dernière fille. Puisque les filles n'étaient pas côte à côte au départ, on ne peut pas se retrouver avec deux filles au même endroit lors de cette opération, et elles occuperont donc six places distinctes dont les numéros ne peuvent plus varier qu'entre 1 et 40 (on a déplacé de 5 unités la dernière fille). Réciproquement, si on part de six numéros compris entre 1 et 40, on peut faire l'opération inverse : on ne touche pas au premier, on augmente le deuxième d'une unité, etc, pour obtenir à l'arrivée six numéros entre 1 et 45 sans risque d'en avoir deux consécutifs. Il y a exactement $\binom{40}{6}$ façons de choisir ces six numéros, mais attention, il faut enlever tous les cas où les deux numéros extrêmes (le 1 et le 40) ont été choisis, sinon on va se retrouver avec deux filles aux places 1 et 45, donc côte à côte. Il y a $\binom{38}{4}$ cas où on a choisi le 1 et le 40 (ces deux numéros sont imposés, il en reste 4 à choisir parmi les 38 restants), donc le nombre de placements sans filles côte à côte est égal à $\binom{40}{6} - \binom{38}{4} = 3\,838\,380 - 73\,815 = 3\,764\,565$, ce qui donne une probabilité égale à $\frac{35\,853}{77\,572}$. La probabilité qu'il y ait au moins deux filles côte à côte est donc de $\frac{41\,719}{77\,572} \simeq 0.538$. Eh oui, il y a plus d'une chance sur deux que ça se produise, ce qui n'est pas vraiment intuitif (si vous jouez au Loto et que ne mettez jamais dans votre grille deux numéros consécutifs, pas sûr que ce soit très malin).

Si on suppose maintenant que nos élèves sont assis autour de tables de 15, calculons comme ci-dessus la probabilité qu'il n'y ait **pas** deux filles côte à côte, en fonction du nombre de filles présentes à la table (les raisonnements sont les mêmes que pour le premier calcul ci-dessus) :

- s'il y a six filles à la table, le nombre de placements sera égal à $\binom{10}{6} - \binom{8}{4} = 140$, et la probabilité correspondante égale à $\frac{140}{\binom{15}{6}} = \frac{140}{5\,005} = \frac{4}{143}$ (oui, ça ne fait vraiment pas beaucoup).
- avec cinq filles, le nombre de possibilités devient $\binom{11}{5} - \binom{9}{3} = 378$, donc une probabilité de

$$\frac{378}{\binom{15}{5}} = \frac{18}{143}.$$

- avec quatre filles à table, on monte à $\binom{12}{4} - \binom{10}{2} = 450$ cas, soit une probabilité de $\frac{182}{\binom{15}{4}} = \frac{30}{91}$.
- avec trois filles à table, on a $\binom{13}{3} - \binom{11}{1} = 275$ cas et une proba de $\frac{275}{\binom{15}{3}} = \frac{55}{91}$.
- avec deux filles, on a $\binom{14}{2} - 1 = 90$ cas, soit une proba de $\frac{90}{105} = \frac{6}{7}$.
- avec une ou zéro fille, la probabilité est évidemment égale à 1.

Il reste ensuite à calculer la probabilité d'apparition de chacune des répartitions des filles entre les trois tables. Le nombre total de façons de répartir les 45 élèves sur les trois tables est de $\binom{45}{15} \times \binom{30}{15} \simeq 5.3 \times 10^{19}$ (oui c'est beaucoup). Si on veut par exemple deux filles sur chaque table, il y a $\binom{6}{2} \times \binom{39}{13} \times \binom{4}{2} \times \binom{26}{13}$ cas possibles. Attention, si la répartition des filles n'est pas équilibrée (par exemple 3, 2 et une fille sur les trois tables), il faut multiplier le produit de coefficients binômiaux correspondants par $3! = 6$ (l'ordre des tables n'ayant pas d'importance). On obtient les probabilités suivantes :

- répartition 6 – 0 – 0 des filles avec une probabilité $\frac{13}{7\,052}$.
- répartition 5 – 1 – 0 avec une probabilité $\frac{117}{3\,526}$.
- répartition 4 – 2 – 0 avec une probabilité $\frac{4\,095}{38\,786}$.
- répartition 4 – 1 – 1 avec une probabilité $\frac{8\,775}{77\,572}$.
- répartition 3 – 3 – 0 avec une probabilité $\frac{5\,915}{77\,572}$.
- répartition 3 – 2 – 1 avec une probabilité $\frac{20\,475}{38\,786}$.
- répartition 2 – 2 – 2 avec une probabilité $\frac{11\,025}{77\,572}$ (ouf, la somme est bien égale à 1).

Il ne reste plus qu'à faire une magnifique moyenne pondérée des différents cas pour trouver la probabilité globale de n'avoir de paires de filles côte à côte à aucune table, ce qui donne $\frac{35\,853}{77\,572}$. Il reste donc une proba d'avoir deux filles côte à côte égale à $\frac{41\,719}{77\,572} \simeq 53.8\%$. Mais, mais, incroyable, c'est **exactement** la même probabilité qu'avec une seule table de 45 personnes ! Bon, il ne reste plus qu'à vérifier ce que ça donne avec cinq tables de neuf, mais j'avoue avoir la flemme de faire tous les cas, qui sont encore un peu plus nombreux qu'avec trois tables de quinze... (sans surprise, la proba sera à nouveau la même, ce qu'on peut d'ailleurs tenter d'expliquer « logiquement » avec à peine un peu de mauvaise foi).

Énigme 2 : le sapin de Noël.

Pour les calculs qui suivent, je vais noter c le côté du pentagone intérieur à l'étoile, et a le côté du décagone dans lequel l'étoile est inscrite (on cherchera plus tard le lien entre a et c). On va calculer successivement l'aire du pentagone (en fonction de c), celle d'une branche de l'étoile (toujours en fonction de c), puis celle du décagone (en fonction de a), et enfin trouver une relation entre a et c , et on aura alors tous les éléments pour effectuer le calcul demandé.

Dans un pentagone régulier, chaque angle intérieur a pour mesure $\frac{3\pi}{5}$ (on peut découper le pentagone en trois triangles dont la somme des angles vaut évidemment 3π , et cette même somme est tout aussi évidemment égale à cinq fois la valeur d'un angle intérieur). On peut donc découper notre pentagone en cinq triangles isocèles ayant un sommet au centre du pentagone et pour angles $\frac{3\pi}{10}$ (pour les deux angles égaux) et $\frac{2\pi}{5}$ (pour l'angle « au centre »). La hauteur h de chacun de ces triangles vérifie $\tan\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \frac{h}{\frac{c}{2}}$, donc $h = \frac{c}{2} \tan\left(\frac{3\pi}{10}\right)$. L'aire de chaque triangle vaut donc $\frac{ch}{2} = \frac{c^2}{4} \tan\left(\frac{3\pi}{10}\right)$. Pour le pentagone en entier, on a donc une aire égale à $\frac{5c^2}{4} \tan\left(\frac{3\pi}{10}\right)$. Histoire d'avoir une formule concrète, $\tan\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}$ (le calcul des lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{5}$ a été effectué dans le problème de la feuille d'exercices de trigo, je vous laisse aller retrouver tout ça si besoin). L'aire calculée vaut donc $\frac{c^2}{4} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$.

Une branche de l'étoile est un triangle isocèle dont les deux angles égaux ont pour mesure $\frac{2\pi}{5}$ (ils sont supplémentaires d'un angle intérieur du pentagone), et le troisième a donc pour mesure $\frac{\pi}{5}$. Ce triangle a par ailleurs pour base c . Si on note à nouveau h sa hauteur (oui, je recycle la notation, ce n'est pas la même valeur que tout à l'heure), elle vérifie donc $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{h}{\frac{c}{2}}$, donc $h = \frac{c}{2} \tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, puis l'aire de notre branche vaut $\frac{c^2}{4} \tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. L'aire des cinq branches vaut donc $\frac{5c^2}{4} \tan\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{5c^2}{4} \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$.

L'aire du décagone de côté a se calcule avec la méthode que celle du pentagone. Chaque angle intérieur d'un décagone a une mesure de $\frac{4\pi}{5}$ (on peut découper le décagone en huit triangles dont la somme des angles, égale à dix fois l'angle intérieur du décagone, vaut 8π), et on peut donc scinder notre décagone en dix triangles isocèles ayant un sommet au centre du décagone et deux angles égaux à $\frac{2\pi}{5}$, le dernier ayant donc pour mesure $\frac{\pi}{5}$. Un tel triangle a pour base a et sa hauteur h vérifie $\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{2h}{a}$, donc $h = \frac{a}{2} \tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, puis notre triangle a pour aire $\frac{a^2}{4} \tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, ce qui donne pour le décagone une aire totale égale à $\frac{5a^2}{2} \tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, soit $\frac{5a^2}{2} \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$. On remarque que les trois aires calculées se factorisent fort sympathiquement par la même constante $\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$, pour donner pour le rapport d'aires demandé l'expression $\frac{\frac{c^2\sqrt{5}}{4} + \frac{5c^2}{4}}{\frac{5a^2}{2}} = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \times \frac{5 + \sqrt{5}}{10}$.

Il ne reste plus qu'à estimer le rapport entre les deux côtés. Pour cela, on constate que la zone située à l'intérieur du décagone, entre deux branches de l'étoile, est constituée de deux triangles isométriques ayant un angle égal à $\frac{2\pi}{5}$ (la moitié de l'angle intérieur du décagone qui est coupé en deux pour créer les deux triangles), un deuxième égal à $\frac{3\pi}{10}$ (la moitié de l'angle entre deux branches de l'étoile, angle qui est le même que l'angle intérieur du pentagone), et un dernier angle égal aussi à $\frac{3\pi}{10}$ (soit en utilisant la somme des angles dans ce triangle, soit en constatant que c'est la moitié d'un angle intérieur de décagone auquel on a soustrait l'angle de la pointe d'une branche d'étoile). Oui, je sais, un dessin aurait aidé à comprendre mais j'ai la flemme. Bref, on a sous les yeux un triangle isocèle dont deux côtés ont pour longueur a et le troisième a pour longueur l , longueur des deux côtés égaux d'une branche d'étoile. Justement, dans une branche d'étoile dont les deux angles égaux valent $\frac{2\pi}{5}$,

on a $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{c}{2l}$, donc $l = \frac{c}{2\cos(\frac{2\pi}{5})}$. Et dans le triangle isocèle précédemment décrit, on calcule de même $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{l}{2a}$, donc $2a \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{c}{2\cos(\frac{2\pi}{5})}$, puis $\frac{c}{a} = 4 \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$ après quelques petites simplifications que je vous épargne généreusement.

Il est temps de conclure : notre proportion vaut donc $\frac{(5 - 2\sqrt{5})(5 + \sqrt{5})}{10} = \frac{15 - 5\sqrt{5}}{10} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, soit environ 38% de la surface totale en smaragdin. Vraiment un problème passionnant.

Énigme 3 : la nuit de Noël.

Pas grand chose de plus à faire que donner les solutions dans les cas où ça marche :

- la seule solution avec 1, 3, 4 et 6 est $\frac{6}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{6}{\frac{1}{4}} = 6 \times 4 = 24$
- la seule solution avec 1, 5, 5 et 5 est $5 \times \left(5 - \frac{1}{5}\right) = 5 \times \frac{24}{5} = 24$
- la seule solution avec 3, 3, 8 et 8 est $\frac{8}{3 - \frac{8}{3}} = \frac{8}{\frac{1}{3}} = 8 \times 3 = 24$
- il est impossible d'obtenir 24 avec le tirage 3, 4, 8 et 8
- pour les tirages avec quatre chiffres identiques, c'est impossible avec quatre 1, quatre 2, quatre 7, quatre 8 ou quatre 9, mais possible avec quatre 3 (par exemple $3 \times 3 \times 3 - 3 = 24$), avec quatre 4 (par exemple $4 \times 4 + 4 + 4 = 24$), quatre 5 (par exemple $5 \times 5 - \frac{5}{5} = 24$), quatre 6 (celui-là, même mon caniche y arrive : $6 + 6 + 6 + 6 = 24$)

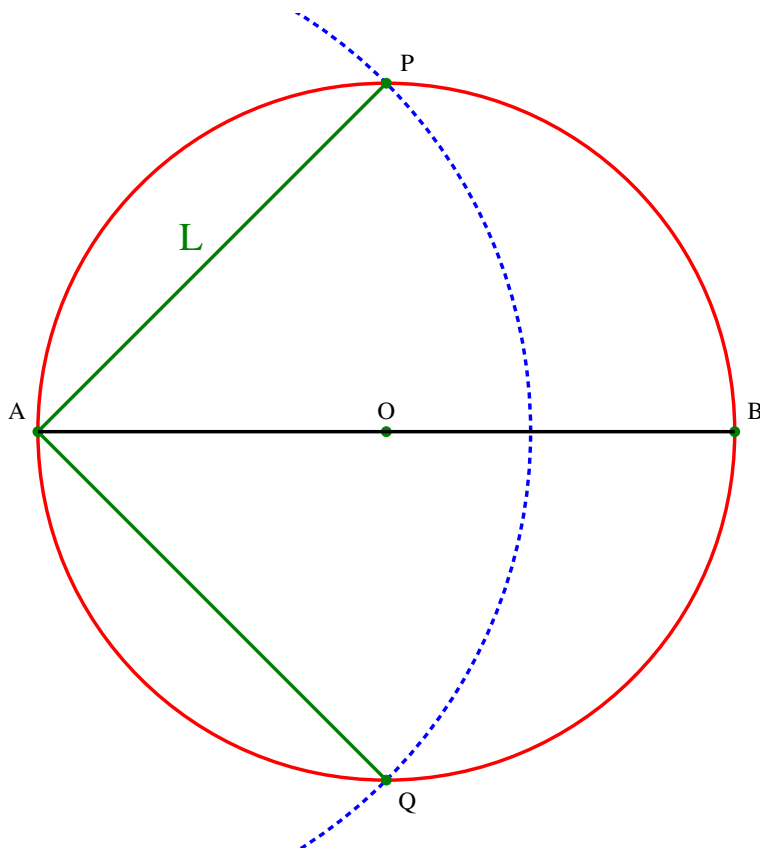
Kevin rajoute une question subsidiaire : si on autorise aussi à tirer le nombre 10, quel est le tirage qui donne le plus grand nombre de calculs différents (les calculs identiques à permutation près sont considérés comme étant les mêmes) aboutissant à 24 ? C'est trivial, mon petit Kevin, c'est le tirage 2, 4, 8, 10 avec les 11 calculs suivants : $2 + 4 + 8 + 10 = 10 \times 4 - 2 \times 8 = 4 \times (8 \times 2 - 10) = 8 \times \frac{10 - 4}{2} = 4 \times \left(10 - \frac{8}{2}\right) = (10 + 2) \times \frac{8}{4} = 10 \times 2 + 8 - 4 = 4 \times 8 + 2 - 10 = 4 \times (10 - 2) - 8 = 2 \times \left(10 + \frac{8}{4}\right) = \frac{10 \times 4 + 8}{2} = 24$.

Énigme 4 : l'âge du père Noël

Le seul nombre qui fonctionne est 6 210 001 000, qui contient bien six fois le chiffre 0, deux fois le chiffre 1, une fois le chiffre 2 et le chiffre 6 et aucune fois les autres chiffres. Pour montrer rigoureusement que c'est le seul cas possible, pas vraiment d'autre choix qu'une distinction de cas un peu laborieuse, mais pas si longue que ça (la somme de tous les chiffres du nombre est nécessairement égale à 10 et le nombre de 0 ne peut pas être inférieur à 5, ce qui ne fait que quelques cas à traiter).

Énigme 5 : le dessert des rennes du père Noël

Pour simplifier les calculs, on va plutôt supposer que le disque a pour rayon 1 (il suffit de dire qu'on prend les décimètres comme unité) et que le renne est attaché au point A , extrémité d'un diamètre $[AB]$ du disque. On note L la longueur de la corde, et on va noter O le centre du disque, et P et Q les points du cercle situés à distance L de notre point A . Autrement dit, on a un dessin qui ressemble à ceci (la figure ne répond pas au problème, puisque sur la figure l'aire broutée par le renne est clairement supérieure à la moitié de la surface totale) :



Sur ce schéma, donc, si on note x l'angle $\widehat{AOP}$ (qui est droit sur le dessin mais ne le sera pas en pratique), l'angle $\widehat{ABP}$ a pour mesure $\frac{x}{2}$ (théorème de l'angle au centre), et comme le triangle APB sera toujours un triangle rectangle en P (triangle dont un côté est un diamètre du cercle et dont le troisième point est situé sur le cercle), l'angle $\widehat{APB}$ est toujours droit, et $\widehat{OAP}$ a donc pour mesure $\frac{\pi - x}{2}$. L'angle $\widehat{PAQ}$ a donc pour mesure $\pi - x$, et l'aire du secteur circulaire du grand disque (en pointillés bleus sur le dessin, celui qui a pour rayon L et pour centre A) compris entre ses points P et Q est donc égale à $\frac{\pi - x}{2\pi} \times \pi L^2 = \frac{(\pi - x)L^2}{2}$. Or, dans le triangle rectangle APB , on a la relation $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{L}{2}$ (l'hypothèse du triangle est le diamètre $[AB]$ de notre pré, qui a par hypothèse pour rayon 1), donc $L = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$, et l'aire du secteur calculée précédemment vaut $2(\pi - x) \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

Pour obtenir l'aire broutée, il faut ajouter deux fois l'aire de la portion de pré située au-dessus de la corde de longueur L entre les points P et Q . Cette aire est égale à celle du secteur du pré compris entre P et Q , qui vaut $\pi \times \frac{x}{2\pi} = \frac{x}{2}$ (on est dans un pré de rayon 1, à laquelle on soustrait l'aire du triangle AOP . Celui-ci a une base de longueur 1, et une hauteur issue de P de longueur $\sin(x)$ (si ça ne vous semble pas clair, regardez le triangle OPH , où H est le projeté orthogonal de P sur (AB)), donc pour aire $\frac{\sin(x)}{2}$). L'aire totale de broutage vaut donc $2(\pi - x) \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + x - \sin(x)$. Or, ce qu'on veut, c'est que cette aire soit exactement la moitié de celle du pré complet, donc que $2(\pi - x) \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + x - \sin(x) = \frac{\pi}{2}$. En rappelant que $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{2}$, on trouve l'équation équivalente $(\pi - x)(1 - \cos(x)) + x - \sin(x) = \frac{\pi}{2}$, soit $\frac{\pi}{2} = \sin(x) + (\pi - x) \cos(x)$. Si on trouve une solution x à cette équation, on aura alors $L = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$. Seul léger problème, cette équation ne se résout pas de façon exacte ! Pas grave, Wolfram nous donne généreusement $x \simeq 1.236$ radian, ce qui fournit ensuite $L \sim 1.159$ décamètre, donc une corde d'environ 11.6 mètres.