

Devoir Maison n° 4 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

20 novembre 2025

Exercice 1

1. On va commencer par effectuer une décomposition en éléments simples. Notre dénominateur peut se factoriser sous la forme $k(k^2+k-2)$, avec un deuxième facteur qui a pour discriminant $\Delta = 1+8 = 9$ et pour racines $k_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$ et $k_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$. On en déduit l'existence de trois constantes a , b et c telles que $\frac{2k+3}{k^3+k^2-2k} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k-1} + \frac{c}{k+2}$. Les méthodes classiques (produit par k , $k-1$ et $k+2$ puis évaluation en 0, 1 et -2 respectivement) donnent $a = -\frac{3}{2}$, $b = \frac{5}{3}$ et $c = -\frac{1}{6}$, dont on constate qu'elles vérifient $a+b+c=0$. On peut alors calculer notre somme via télescopage :
$$S_n = -\frac{3}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + \frac{5}{3} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \frac{1}{6} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k+2} = -\frac{3}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + \frac{5}{3} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{6} \sum_{k=4}^{n+2} \frac{1}{k} = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2n} - \frac{3}{2} \sum_{k=4}^n \frac{1}{k} + \frac{5}{3} + \frac{5}{6} + \frac{5}{9} + \sum_{k=4}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{6n} - \frac{1}{6(n+1)} - \frac{1}{6(n+2)} = \frac{65}{36} - \frac{5}{3n} - \frac{1}{6(n+1)} - \frac{1}{6(n+2)}$$
. On ne cherche surtout pas à mettre au même dénominateur, ça n'a strictement aucun intérêt.
2. On va donc démontrer $P_n : \sum_{k=2}^n \frac{2k+3}{k^3+k^2-2k} = \frac{65}{36} - \frac{5}{3n} - \frac{1}{6(n+1)} - \frac{1}{6(n+2)}$ par récurrence, pour tout entier $n \geq 2$. On initialise donc pour $n=2$. Dans ce cas, la somme de gauche vaut $\frac{7}{8+4-4} = \frac{7}{8}$, et l'expression de droite est égale à $\frac{65}{36} - \frac{5}{6} - \frac{1}{18} - \frac{1}{24} = \frac{130-60-4-3}{72} = \frac{63}{72} = \frac{7}{8}$. Ouf, ça marche ! Pour l'hérédité, on s'empresse de constater qu'on peut appliquer le calcul de décomposition en éléments simples de la question précédente pour $k=n+1$ (c'est vrai pour tout entier) pour obtenir $\frac{2(n+1)+3}{(n+1)^3+(n+1)^2-2(n+1)} = -\frac{3}{2(n+1)} + \frac{5}{n} - \frac{1}{6(n+3)}$. En supposant la propriété P_n vérifiée (pour un entier $n \geq 2$) en en appliquant l'hypothèse et cette égalité, on trouve alors
$$S_{n+1} = S_n + \frac{2(n+1)+3}{(n+1)^3+(n+1)^2-2(n+1)} = \frac{65}{36} - \frac{5}{3n} - \frac{1}{6(n+1)} - \frac{1}{6(n+2)} - \frac{3}{2(n+1)} + \frac{5}{3n} - \frac{1}{6(n+3)} = \frac{65}{36} - \frac{5}{3(n+1)} - \frac{1}{6(n+2)} - \frac{1}{6(n+3)},$$
 soit exactement la propriété P_{n+1} , ce qui achève la récurrence.

Exercice 2

1. Si $f = 0$, l'équation homogène $y'' + y = 0$ a pour solutions toutes les fonctions de la forme $x \mapsto A \cos(x) + B \sin(x)$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. C'est du cours ! Les conditions $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ imposent $A = B = 0$, donc seule la solution nulle vérifie ces deux conditions.
2. Calculons : $F(x) = -\cos(x) \int_0^x \sin(t) dt - \sin(x) \int_x^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = -\cos(x)[- \cos(t)]_0^x - \sin(x)[\sin(t)]_x^{\frac{\pi}{2}} = \cos^2(x) - \cos(x) - \sin(x) + \sin^2(x) = 1 - \cos(x) - \sin(x)$. On dérive une première fois : $F'(x) = \sin(x) - \cos(x)$, puis $F''(x) = \cos(x) + \sin(x)$, donc on déduit que $F(x) + F''(x) = 1$.

On a déjà résolu l'équation homogène associée à l'équation $y'' + y = 1$, et la fonction constante égale à 1 en est une solution triviale, donc les solutions de (E) sont ici de la forme $x \mapsto A \cos(x) + B \sin(x) + 1$. Les deux conditions imposent cette fois-ci que $A + 1 = 0$ et $B + 1 = 0$, donc que $A = B = -1$. Autrement dit, il existe une unique solution convenable, qui n'est autre que la fonction F .

3. Commençons par la résolution de l'équation. Encore une fois, il y a une solution particulière évidente définie par $y_p(x) = x$ (qui a une dérivée seconde nulle), donc les solutions sont de la forme $y : x \mapsto A \cos(x) + B \sin(x) + x$. Les conditions imposent $A = 0$ et $B + \frac{\pi}{2} = 0$, donc $B = -\frac{\pi}{2}$, puis $y(x) = x - \frac{\pi}{2} \sin(x)$.

Il est temps de calculer $F(x) = -\cos(x) \int_0^x t \sin(t) dt - \sin(x) \int_x^{\frac{\pi}{2}} t \cos(t) dt$. On effectue une IPP pour chaque intégrale, en dérivant à chaque fois le facteur t (pour une fois je n'écris pas tous les détails), pour obtenir $F(x) = -\cos(x)[-t \cos(t)]_0^x - \cos(x) \int_0^x \cos(t) dt - \sin(x)[t \sin(t)]_x^{\frac{\pi}{2}} + \sin(x) \int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt = x \cos^2(x) - \cos(x) \sin(x) - \frac{\pi}{2} \sin(x) + x \sin^2(x) + \cos(x) \sin(x) = x - \frac{\pi}{2} \sin(x) = F(x)$. Tiens, quelle curieuse coïncidence.

4. Rappelons que, si g est une fonction continue, toute fonction de la forme $x \mapsto \int_a^x g(t) dt$ est une primitive de g (et même plus précisément la primitive de g s'annulant en a), avec évidemment changement de signe si la borne égale à x est située en bas de l'intégrale. On peut donc calculer dans le cas général $F'(x) = \sin(x) \int_0^x f(t) \sin(t) dt - f(x) \cos(x) \sin(x) - \cos(x) \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t) \cos(t) dt + f(x) \sin(x) \cos(x)$ (cool, ça se simplifie), puis $F''(x) = \cos(x) \int_0^x f(t) \sin(t) dt + f(x) \sin^2(x) + \sin(x) \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t) \cos(t) dt + f(x) \cos^2(x) = F(x) + f(x)$, donc $F''(x) + F(x) = f(x)$.

On vient de prouver que F est une solution particulière de l'équation (E), on en connaît déjà les solutions de l'équation homogène, donc toutes les solutions de (E) sont de la forme $y : x \mapsto A \cos(x) + B \sin(x) + F(x)$, avec toujours $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Or, $F(0) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ (à chaque fois, une des deux intégrales est trivialement nulle, et le facteur devant l'autre s'annule), donc les deux conditions habituelles imposent $A = B = 0$. Autrement dit, F est la seule solution convenable de (E).

5. Si on suppose $T(f) = T(g)$, cela signifie que les fonctions F et G (en notant G l'équivalent de F pour la fonction g) sont égales, donc leur dérivées secondes également. Mais comme $F'' + F = f$ et $G'' + G = g$, cela implique $f = g$, donc l'application T est injective. Par

contre elles n'est certainement pas surjective puisqu'on a rappelé à la question précédente que les fonctions F s'annulaient nécessairement en 0 et en $\frac{\pi}{2}$, ce qui n'est évidemment pas le cas de toutes les fonctions continues. La fonction constante égale à 42 n'a par exemple pas d'antécédent par l'application F .

6. (a) En notant 0 la fonction nulle, on sait que $T(0) = 0$, et comme la fonction T est injective, il n'existe pas de fonction f non nulle vérifiant $T(f) = 0$, ce qui prouve que λ ne peut pas être égal à 0. Par hypothèse, $F = \lambda f$ et $F'' + F = f$, donc $\lambda f'' + \lambda f = f$. On peut tout diviser par λ qui est non nul pour obtenir la forme souhaitée. Les valeurs en 0 et en $\frac{\pi}{2}$ sont nulles comme celles de F puisque les deux fonctions sont par hypothèse proportionnelles.
- (b) Si $\lambda = 1$, l'équation de la question précédente devient $f'' = 0$ donc f est une fonction affine. Comme elle s'annule deux fois, elle est nécessairement nulle. Il n'y a donc aucune solution convenable dans ce cas (autrement dit, 1 n'est pas valeur propre de l'application T).
- (c) On sait que, dans ce cas, l'équation $f'' - \omega^2 f = 0$ aura des solutions ayant pour expression $f(x) = A \operatorname{ch}(\omega x) + B \operatorname{sh}(\omega x)$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Oui, pour une fois, l'expression avec les fonctions sh et ch est plus pratique car la condition $f(0) = 0$ se traduit directement par $A = 0$. Ensuite, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ impose $B = 0$ (la fonction sh ne s'annule qu'en 0, donc sûrement pas à cet endroit), donc une fois de plus seule la fonction nulle convient.
- (d) Cette fois-ci, l'équation $f'' + \omega^2 f = 0$ a des solutions d'expression $f(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. La condition $f(0) = 0$ impose $A = 0$, et la fonction f ne peut donc être non nulle que si $\sin\left(\frac{\pi}{2}\omega\right) = 0$. C'est le cas si $\frac{\pi}{2}\omega$ est un multiple entier de π , donc si $\omega = 2n$, avec $n \in \mathbb{Z}^*$ (le cas $\omega = 0$ redonnant une solution nulle). On doit donc avoir $1 - \frac{1}{\lambda} = (2n)^2 = 4n^2$, d'où $\lambda = \frac{1}{1 - 4n^2}$ (qui n'est pas du tout supérieur à 1 comme le prétendait l'énoncé, mais strictement négatif).