

Devoir Maison n° 4

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 20 novembre 2025

Un court DM pour cette fois-ci car vous n'aurez pas énormément de temps pour le faire, et qu'on a déjà deux DS prévus sur le mois de novembre.

Exercice 1

On pose pour cet exercice $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{2k+3}{k^3+k^2-2k}$.

1. Calculer S_n en fonction de n .
2. Redémontrer la formule obtenue par récurrence.

Exercice 2

On s'intéresse dans cet exercice à des équations différentielles de la forme $(E) : y'' + y = f(x)$, où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Plus précisément, on cherchera les solutions de cette équation vérifiant les conditions $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Pour cela, on associe à toute fonction f continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ une nouvelle fonction $F = T(f)$ définie par $F(x) = -\cos(x) \int_0^x f(t) \sin(t) dt - \sin(x) \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t) \cos(t) dt$ (l'application T est donc une application définie sur l'ensemble des fonctions continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et à valeurs dans ce même ensemble).

1. Résoudre l'équation dans le cas où f est la fonction nulle, et préciser les solutions éventuelles vérifiant $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
2. Lorsque $f(x) = 1$ (fonction constante donc), calculer $F(x)$ puis $F''(x) + F(x)$, et déterminer toutes les solutions de (E) vérifiant $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
3. Même question lorsque $f(x) = x$.
4. Dans le cas général où f est une fonction continue quelconque, calculer $F''(x) + F(x)$, et déterminer à nouveau les solutions de (E) vérifiant $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ (normalement, si vous ne vous êtes pas plantés dans les questions précédentes, vous avez déjà une bonne idée de ce que ça devrait donner).
5. L'application $T : f \mapsto F$ est-elle une application injective ? Surjective ?
6. On suppose dans cette dernière question que f est une fonction non nulle vérifiant $T(f) = \lambda f$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (pour les plus curieux, on est en train de chercher les valeurs propres de l'endomorphisme T , vous comprendrez mieux tout ça dans quelques mois).
 - (a) Montrer que $\lambda \neq 0$, et que f vérifie les conditions suivantes : $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,
$$f''(x) + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) f(x) = 0.$$
 - (b) Déterminer les fonctions f convenables (s'il y en a !) lorsque $\lambda = 1$.
 - (c) Déterminer les fonctions f convenables lorsque $1 - \frac{1}{\lambda} = -\omega^2$, avec $\omega > 0$ (écriture qui est toujours possible lorsque $0 < \lambda < 1$).
 - (d) On suppose cette fois-ci $1 - \frac{1}{\lambda} = \omega^2$, avec toujours $\omega > 0$ (ce qui suppose désormais que $\lambda > 1$). Montrer que, s'il existe une fonction f non nulle convenable, alors ω est un entier pair non nul, en déduire la forme nécessairement prise par λ .