

Devoir Maison n° 3 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

4 novembre 2025

Problème

I. Propriétés générales de $\mathbb{R}$.

1. L'ensemble S_x est non vide, il contient par exemple le rationnel $x - 1$. Il n'est pas non plus égal à $\mathbb{Q}$ tout entier puisqu'il ne contient pas le rationnel x . De plus, S_x ne peut pas avoir de maximum : si $y < x$ est un rationnel appartenant à S_x , alors $\frac{y+x}{2}$ est un autre rationnel qui reste strictement inférieur à x , donc appartenant aussi à S_x . Enfin, si $y_1 \in S$, alors par définition $y_1 < x$, donc tout rationnel y_2 vérifiant $y_2 \leq y_1$ vérifie également $y_2 < x$ (par transitivité de la relation d'ordre naturel sur $\mathbb{Q}$, si on veut justifier), donc $y_2 \in S_x$.
2. Si y est un rationnel n'appartenant pas à S , et x un rationnel quelconque appartenant à S , alors on ne peut pas avoir $z \leq x$ (troisième propriété définissant les sections), donc y est strictement supérieur à tout élément de S , ce qui prouve bien que y est un majorant strict de S .

Pour la deuxième propriété demandée, fixons $x \in S$ (S étant non vide, il existe un tel x), et posons, pour tout entier naturel n , $x_n = x + n\varepsilon$. Comme $S \neq \mathbb{Q}$, il existe un rationnel $y \notin S$. Cet élément y est nécessairement inférieur à au moins un élément de la suite (x_n) , qui n'appartient alors lui-même pas à S (toujours la troisième propriété définissant les sections). Choisissons alors l'entier $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \notin S\}$. Cet entier existe (tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum, propriété rappelée dans l'énoncé) et il est non nul puisque $x_0 = x \in S$. On a alors $x_{n_0} \notin S$ mais $x_{n_0-1} = x_{n_0} - \varepsilon \in S$, ce qui donne presque ce qui est demandé. L'énoncé voulait une inégalité stricte ? Eh bien on fait pareil en partant de $\frac{\varepsilon}{2}$.

3. Raisonnons par contraposée : si on n'a pas $S \subset S'$ ni $S' \subset S$, cela signifie qu'il existe deux rationnels x et y vérifiant $x \in S$ mais $x \notin S'$, et $y \in S'$ mais $y \notin S$. Ces éléments ne pouvant pas être égaux, on a par exemple $x < y$, mais x devrait appartenir à S' , ce qui contredit nos hypothèses. De même, si on suppose $x > y$, on doit avoir $y \in S$, ce qui prouve aussi notre contraposée.
4. C'est évident à l'aide de la propriété précédente, puisqu'il existe un entier $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n = S_i$ (il suffit de prendre le « plus grand » ensemble du lot au sens de l'inclusion).

C'est par contre complètement faux pour une union infinie : les ensembles $S_n = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < n\}$ sont des sections pour tout entier naturel n (cf question 1), mais leur union est égale à $\mathbb{Q}$ tout entier.

5. Si deux rationnels x et y sont distincts, alors on a soit $x < y$, auquel cas $\frac{x+y}{2} \in S_y$ mais $\frac{x+y}{2} \notin S_x$, soit $x > y$ et c'est le contraire. Dans les deux cas, $S_x \neq S_y$, ce qui prouve l'injectivité de l'application i . La croissance découle de ce qu'on vient de dire : si $x < y$, il existe un élément dans S_y n'appartenant pas à S_x . D'après la question 3, on a nécessairement dans ce cas $S_x \subset S_y$, donc l'application est croissante. Étant injective, elle est bien strictement croissante.

6. Le fait que cette relation prolonge l'ordre naturel de $\mathbb{Q}$ vient d'être prouvé à la question précédente. La relation est trivialement réflexive (toute section vérifie $S \subset S$), transitive (si $S \subset S'$ et $S' \subset S''$, alors $S \subset S''$) et antisymétrique (si $S \subset S'$ et $S' \subset S$, alors $S = S'$, la double inclusion est même une méthode de base de démonstration de l'égalité de deux ensembles). Enfin, le fait que la relation d'ordre soit totale a déjà été démontré en question 3 : on a soit $S \leq S'$, soit $S' \leq S$.
7. Si l'ensemble A est majoré, il existe donc une section S_0 vérifiant : $\forall S \in A, S \subset S_0$ (ici, S est une section, donc un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$). Or, l'ensemble M décrit dans l'énoncé de la question vérifie également $\forall S \in A, S \subset M$ (ce qui prouve que M est un majorant de A) et vérifie certainement $M \subset S_0$, puisque S_0 contient toutes les sections de A , donc également leur union. L'ensemble M est donc le plus petit majorant possible de A , mais il reste à prouver que M est une section. Clairement, M n'est pas vide, et $M \neq \mathbb{Q}$ puisque $M \subset S_0$, avec par hypothèse S_0 qui est une section, donc $S_0 \neq \mathbb{Q}$. Si M admettait un maximum y , alors y appartiendrait à l'une des sections constituant A , et en serait un maximum, ce qui n'est pas possible. L'ensemble M n'a donc pas de maximum. Enfin, si x est un rationnel appartenant à M , il appartient à une des sections S constituant A , donc S contient tous les rationnels $y \leq x$, et M également, ce qui achève de prouver que M est bien une section, et donc la borne supérieure de l'ensemble A .
8. Supposons donc que $S \subset S'$, avec $S \neq S'$. Il existe donc un rationnel x appartenant à S' mais pas à S . On peut alors déjà remarquer que la section S_x définie à la question 1 vérifie $S \subset S_x \subset S'$. En effet, tout rationnel appartenant à S est strictement inférieur à x , car s'il était supérieur, S devrait contenir x à cause de la troisième hypothèse définissant les sections, donc $S \subset S_x$. De plus, comme $x \in S'$, S' contient tout rationnel inférieur à x , donc $S_x \subset S'$. Cette inclusion est même stricte puisque $x \notin S_x$, ce qui prouve déjà l'inégalité stricte $S_x \subset S'$. Mais comme par ailleurs S' ne peut pas contenir de maximum, on peut en fait trouver un autre (et même plein d'autres en pratique) rationnel y vérifiant $x < y$ et $y \in S'$, avec donc $S \leq i(x) < i(y) \leq S'$, ce qui prouve la densité demandée.
9. Raisonnons par l'absurde : si une section S ne vérifie pas la condition demandée, alors on a, pour tout entier naturel n , $i(n) < S$. En particulier, S contient tous les rationnels strictement inférieurs à n . Comme cela doit être vrai pour tout entier n et que $\mathbb{Q}$ est un ensemble archimédien (tout rationnel est inférieur à un certain entier), alors S doit contenir tous les rationnels. Autrement dit, $S = \mathbb{Q}$, ce qui est explicitement interdit dans la définition des sections.

II. Construction des opérations usuelles sur $\mathbb{R}$.

1. Les notations de l'énoncé étaient incohérentes, on aurait du avoir des x partout. Surtout, la définition de l'opposé d'une section n'était pas franchement claire : la définition ensemble donnée est valable pour un réel **non rationnel**. Pour un rationnel, la définition de l'opposé est celle donnée entre parenthèse : $-S_x = S_{-x}$. Avec cette définition, la question 1 devient complètement triviale.
2. L'égalité $-0 = 0$ découle immédiatement de la constatation de la question 1 : $S(0) = S(-0) = -S(0)$. Si $S \notin \mathbb{Q}$, par définition, $x \in -S$ si $-x \notin S$, ce qui revient exactement à dire que $-x \in -S \Leftrightarrow -x \in (-S)$.
3. Si S vérifie $0 < S$, alors S contient $S(0)$, donc l'ensemble de tous les rationnels strictement négatifs. Mais comme elle ne peut pas être égal à 0, la section S contient au moins un rationnel positif ou nul. Si elle ne contenait que le nombre 0 dans cette catégorie, alors 0 serait de façon évidente le maximum de S , qui est censée ne pas en avoir. On a donc prouvé que S contenait nécessairement un rationnel **strictement** positif. Réciproquement, si S contient un rationnel $x > 0$, elle contient tous les rationnels inférieurs à x , donc a fortiori tous les rationnels strictement négatifs, ce qui prouve que $0 < S$.

4. La commutativité de l'opération est complètement triviale. Reste à prouver que $S + S'$ est bien une section. On sait (partie I, question 2), que toute section est majorée. En notant x_1 un majorant de S et x_2 un majorant de S_2 , le rationnel $x_1 + x_2$ est un majorant de $S_1 + S_2$, ce qui prouve que $S_1 + S_2 \neq \mathbb{Q}$. Bien sûr, le fait que $S_1 + S_2 \neq \emptyset$ est évident. Supposons maintenant par l'absurde que $S_1 + S_2$ admette un maximum M . Par définition, on devrait avoir $M = m_1 + m_2$, avec $m_1 \in S$ et $m_2 \in S'$. Mais comme S et S' n'ont elles-mêmes pas de maximum, on peut trouver un élément $x_1 \in S$ et un élément $x_2 \in S'$ vérifiant $m_1 < x_1$ et $m_2 < x_2$. On a alors $M < x_1 + x_2 \in S + S'$, ce qui contredit légèrement la définition de ce qu'est un maximum. L'ensemble $S_1 + S_2$ n'a donc pas de maximum. Enfin, dernière vérification, si $x \in S + S'$ et y est un rationnel vérifiant $y \leq x$, alors on peut décomposer x en $x_1 + x_2$, avec $x_1 \in S$ et $x_2 \in S'$, puis écrire $y = x_1 + (y - x_1)$, avec par hypothèse $y - x_1 \leq x_2$, La définition des sections assure alors que $y - x_1 \in S'$ (et bien sûr $x_1 \in S$), donc $y \in S + S'$. L'ensemble $S + S'$ est donc bien un réel.
5. Il faut donc montrer que, si x et x' sont deux rationnels, $S_x + S_{x'} = S_{x+x'}$. Supposons $y \in S_x + S_{x'}$, par définition $y = y_1 + y_2$, avec $y_1 < x$ et $y_2 < x'$, et on en déduit trivialement que $y < x + x'$, ce qui prouve que $y \in S_{x+x'}$. Réciproquement, si un rationnel vérifie $y < x + x'$, on pose $\varepsilon = x + x' - y$, qui est donc un réel strictement positif, et on peut décomposer y en $y = \left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(x' - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ qui est un élément de $S_x + S_{x'}$, ce qui prouve l'inclusion réciproque.
6. Hum, le concepteur de cet énoncé devait être fatigué, on a déjà signalé que l'addition était commutative. Vérifions donc que $S + 0 = S$ pour une section quelconque. Soit $x \in S + 0$, par définition x peut donc s'écrire $y + z$, avec $y \in S$ et $z < 0$. Autrement dit, $x < y$, avec $y \in S$, donc $x \in S$, ce qui prouve que $S + 0 \subset S$. Supposons maintenant réciproquement que $x \in S$. On sait que S n'admet pas de maximum, et donc qu'il existe $y > x$, avec $y \in S$. On écrit alors $x = y + (x - y)$, avec $x - y < 0$ pour obtenir $x \in S + 0$, ce qui prouve l'inclusion réciproque et démontre que $S + 0 = S$.
7. Puisque $S \neq \emptyset$ et $S \neq \mathbb{Q}$, il existe des rationnels appartenant à S et d'autres n'appartenant pas à S , ce qui prouve la même chose pour $-S$, qui ne peut donc être ni vide ni égale à $\mathbb{Q}$ tout entier. Supposons ensuite que $-S$ admette un maximum M . Alors $-M$ serait un minimum de S : $\forall x < -M, -x > M$, donc $-x \notin -S$, ce qui prouve que $x \notin S$. Or, une section ne peut certainement pas avoir de minimum puisqu'elle contient tous les rationnels inférieurs à chacun de ses éléments ! Cette absurdité prouve que $-S$ n'a pas de maximum. Enfin, supposons $x \in -S$, donc $-x \notin S$, et $y \leq x$, donc $-y \geq -x$. Le rationnel $-y$ ne peut certainement pas appartenir à S , sinon $-x$ y serait également, donc $y \in -S$, ce qui prouve la dernière propriété faisant de $-S$ une section.

Soit $y \in S + (-S)$, on a donc $y = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in S$ et $x_2 \in -S$, donc $-x_2 \notin S$. En particulier, $-x_2 > x_1$ (toujours la troisième hypothèse de la définition des sections), donc $x_1 + x_2 < 0$, ce qui prouve que $S + (-S) \subset 0$. Dans l'autre sens, on remonte à la question 2 de la partie I : on peut trouver $x_1 \in S$ et $y \notin S$ tels que $x_1 - y > -\frac{1}{n}$ pour tout entier naturel n . En posant $x_2 = -y \in -S$, on a donc un élément de $S + (-S)$ strictement supérieur à $-\frac{1}{n}$. Tout rationnel strictement négatif étant inférieur à un nombre de la forme $-\frac{1}{n}$, $S + (-S)$ contient donc tous les rationnels strictement négatifs, ce qui prouve que $0 \subset S + (-S)$. Finalement, on a bien $S + (-S) = 0$.
8. Pour les rationnels, cela découle de la question 1 : $-(-i(r)) = i(-(-r)) = i(r)$. Pour les réels non rationnels, cela découle de la question 2 : $x \in -(-S) \Leftrightarrow (-x) \notin (-S) \Leftrightarrow x \in S$.
9. Si $S \geq 0$, on a $|S| = S$ et $|-S| = -(-S) = S$, donc ça marche. Si $S \leq 0$, $|S| = -S$ et $|-S| = -S$, ça marche aussi.
10. On ne va bien sûr montrer les propriétés que sur $\mathbb{R}^{+*}$ puisqu'on a seulement défini le produit sur cet ensemble. La commutativité est une fois de plus évidente (les sections $i(xy)$ et $i(yx)$

étant identiques, on fait exactement la même union pour calculer SS' et $S'S$, la seule chose à prouver est que SS' est bien une section. Comme S et S' sont supposées strictement positives, elles contiennent chacune des rationnels strictement positifs (question 3), donc SS' n'est pas vide (elle contient au moins un $i(xy)$ non vide). De plus, S étant majoré par un rationnel strictement positif M , et S' par un rationnel strictement positif M' , tous les éléments appartenant aux sections $i(xy)$ dont l'union est égale à SS' sont majorés par MM' , ce qui prouve que $SS' \subset i(MM')$, et donc que SS' est majorée. En particulier, $SS' \neq \mathbb{Q}$. Le reste de la démonstration est quasiment identique à ce qu'on a fait pour la somme en question 4). Premièrement, si SS' admettait un maximum MM' , alors on aurait $M \in i(x)$ et $M' \in i(y)$ pour un certain $x \in S$ et un certain $y \in S'$. Les éléments M et M' seraient mêmes des majorants de $i(x)$ et de $i(y)$ (si on suppose par exemple qu'il existe un rationnel $z \in S'$ strictement supérieur à M' , alors Mz est strictement supérieur à MM' , ce qui est absurde). Autrement dit, $i(x)$ et $i(y)$ admettraient des maximums, ce qui n'est pas possible puisque ce sont des sections. L'ensemble SS' n'a donc pas de maximum. Deuxièmement, supposons $z \in SS'$, avec donc $z \in i(xy)$, pour un certain $x \in S$ et $y \in S'$, strictement positifs tous les deux. Alors, tout rationnel inférieur ou égal à z appartient aussi à $i(xy)$ donc à SS' , ce qui prouve la dernière propriété faisant de SS' une section.

11. C'est complètement évident en reprenant la caractérisation de la question 4 : il existe un rationnel $x > 0$ dans S , il existe un rationnel strictement positif y dans S' , et dans l'ensemble $i(xy)$ se trouve par exemple le nombre $\frac{xy}{2}$ qui est un rationnel strictement positif, et qui appartient donc à SS' , ce qui prouve que $SS' > 0$.
12. Par définition, $i(x)i(y)$ contient tous les nombres strictement inférieurs à un produit lui-même strictement inférieur à xy , donc tous les éléments de $i(x)i(y)$ appartiennent à $i(xy)$, ce qui prouve l'inclusion $i(x)i(y) \subset i(xy)$. Réciproquement, si $z \in i(xy)$, alors z est un rationnel strictement inférieur à xy . Le nombre $\frac{xy}{z}$ est donc un rationnel strictement supérieur à 1. On peut toujours trouver un autre rationnel de la forme $z' = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$ vérifiant $1 < z' < \frac{xy}{z}$ (il suffit de prendre n assez grand, la limite de la suite étant égale à 1), et $z < \left(\frac{x}{1 + \frac{1}{n}}\right) \left(\frac{y}{1 + \frac{1}{n}}\right) < xy$, donc z est inférieur à un produit de rationnels positifs respectivement inférieurs à x et à y , ce qui prouve bien que $z \in i(x)i(y)$.
13. Il faut donc prouver que, pour tout section strictement positive S , $i(1)S = S$. Si $z \in i(1)S$, alors z appartient à une section de la forme $i(xy)$, avec $x < 1$ et $y \in S$, donc $z < xy < y$, avec $y \in S$, ce qui suffit à prouver que $z \in S$ (encore et toujours la troisième propriété de la définition des sections). Réciproquement, si $z \in S$, alors on peut trouver un rationnel strictement supérieur à z dans S , notons-le y . Par hypothèse, $\frac{y}{z} > 1$, et on peut trouver un rationnel x vérifiant $z < x < y$. On a alors $z \in i\left(\frac{x}{y}\right) \times S$, donc $z \in i(1)S$.
14. Comme S est majorée, on peut trouver un rationnel strictement positif n'appartenant pas à S , et vérifiant donc $S < i(x)$. L'union définissant S^{-1} n'est donc pas vide, et contient des rationnels strictement positifs (tous ceux strictement inférieurs à $\frac{1}{x}$). De plus, S contient au moins un rationnel strictement positif y , donc ne peut vérifier $S < i(x)$ pour les rationnels x vérifiant $x < y$. Autrement dit, les $\frac{1}{x}$ apparaissant dans la définition de S^{-1} forment un ensemble majoré par $\frac{1}{y}$, ce qui prouve que S^{-1} lui-même est majoré par ce même rationnel, et ne peut donc pas être égal à $\mathbb{Q}$ tout entier. Si S^{-1} admettait un maximum, il appartendrait à un ensemble de la forme $i\left(\frac{1}{x}\right)$, qui aurait donc lui aussi un maximum, ce qui prouverait

que $i(x)$ admettrait un minimum, hypothèse absurde. Enfin, si $y \in S^{-1}$, y appartient à l'un des $i\left(\frac{1}{x}\right)$ définissant cet inverse, donc tous les rationnels inférieurs à y aussi, et ils sont donc dans S^{-1} , qui est bien une section.

15. Toujours le même type de vérifications. Si $y \in S$ et $z \in S^{-1}$, alors $z \in i\left(\frac{1}{x}\right)$, avec $S < i(x)$, donc $y < x$ et $z < \frac{1}{x}$, ce qui implique évidemment que $yz < 1$ (tout est strictement positif ici), et donc que $SS^{-1} \subset i(1)$. Réciproquement, si z est un rationnel strictement inférieur à 1, on considère deux rationnels x et y tels que $x \in S$, $y \notin S$ et $\frac{x}{y} > z$ (c'est toujours possible car on peut prendre x et y aussi proches qu'on veut l'un de l'autre, cf question 2 de la partie I). On a alors $x \in S$, $\frac{1}{y} \in S^{-1}$ puisque $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$, et $z < x \times \frac{1}{y}$, donc $z \in SS^{-1}$.