Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 2 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

2 octobre 2025

Exercice 1 : une équation fonctionnelle.

1. La fonction identité $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ est une solution du problème.
2. (a) C'est évident : $f(n) = 2n - f \circ f(n) \leqslant 2n$ puisque $f \circ f(n)$ est un entier naturel, donc positif. Et bien sûr, par définition, $f(n) \in \mathbb{N}$, donc $f(n) \geqslant 0$.
   (b) D'après la question précédente, $f(0)$ appartient à un ensemble ne contenant que la valeur 0, donc $f(0) = 0$.
   (c) Toujours d'après la question a, $f(1) \in \{0, 1, 2\}$. Si on suppose $f(1) = 0$, alors $f(1) + f \circ f(1) = 0 + f(0) = 0$, alors qu'on devrait avoir $f(1) + f \circ f(1) = 2$ pour satisfaire la relation initiale. Si on suppose maintenant $f(1) = 2$, alors $f(1) + f \circ f(1) = 2$, donc $f(2) = 0$. Mais alors $f(2) + f \circ f(2) = 0 + f(0) = 0$, ce qui contredit une nouvelle fois la relation de départ. La seule solution restante est donc $f(1) = 1$.
   (d) Raisonnons par l'absurde : si f n'est **pas** injective, on peut trouver deux entiers distincts n et p pour lesquels $f(n) = f(p)$. Mais alors $f \circ f(n) = f \circ f(p)$, donc $f(n) + f \circ f(n) = f(p) + f \circ f(p)$. D'après la relation de départ, cela implique $2n = 2p$, donc $n = p$, ce qui est en contradition flagrante avec notre hypothèse. La fonction est donc bien injective.
   (e) L'initialisation de la récurrence a été faite à la question b. Supposons donc que **tous** les entiers $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ vérifient $f(k) = k$. Alors, par injectivité de la fonction f, on a nécessairement $f(n + 1) \geqslant f(n + 1)$ (toutes les valeurs précédentes étant déjà images d'entiers strictement inférieurs à $n + 1$). On a alors $f \circ f(n + 1) = 2(n + 1) - f(n + 1) \leqslant 2n + 2 - n - 1 = n + 1$ en reprenant une nouvelle fois la relation de départ. Cette inégalité est en fait nécessairement une égalité (sinon l'application f ne serait plus injective), ce qui implique bien que $f(n + 1) = n + 1$ et achève donc la récurrence.
   (f) On a prouvé qu'une solution de l'équation vérifiait nécessairement $f(n) = n$ pour tout entier naturel n. L'identité est donc la seule solution possible.
3. Oui, il en existe plein, et on peut en construire assez facilement. Imaginons par exemple qu'on impose pour commencer $f(0) = 1$, histoire d'avoir une solution différente de l'identité. Alors, la relation appliquée à $n = 0$ impose $1 + f(1) = 0$, donc $f(1) = -1$. On applique ensuite la relation pour $n = 1$ pour obtenir $-1 + f(-1) = 2$ donc $f(-1) = 3$. Puis, en posant $n = -1$, $3 + f(3) = -2$ donc $f(3) = -5$. En continuant ainsi, on trouve successivement les conditions nécessaires $f(-5) = 11$, $f(11) = -21$ et ainsi de suite. Il est facile de prouver que les entiers apparaissant dans ces calculs seront toujours distincts, puisqu'on obtient alternativement des valeurs positives et négatives de plus en plus grandes en valeur absolue. On construit ainsi un sous-ensemble $A \subset \mathbb{Z}$ dont les images par f sont imposées (et tous les entiers appartenant à A vérifient la condition de départ par construction). Il suffit alors de compléter la définition de f en posant : $\forall n \notin A$, $f(n) = n$, et on a une fonction qui convient. On peut en construire d'autres en imposant une valeur différente de 1 pour $f(0)$, ou même en tenant de compléter autrement que par l'identité sur l'ensemble $\mathbb{N} \backslash A$ (mais c'est plus compliqué). Bref, il y a des tonnes de solutions.

Exercice 2 : des inégalités classiques.

1. Il suffit de constater que $x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \geqslant 0$ pour obtenir l'inégalité demandée.
2. Si a et b sont positifs, $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont définis, et on peut leur appliquer l'inégalité de la question précédente pour obtenir $2\sqrt{a}\sqrt{b} \leqslant a + b$, donc $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$.
3. (a) Si $p \leqslant 1$ (avec $p > 0$), alors $\dfrac{1}{p} \geqslant 1$, donc $\dfrac{1}{q} \leqslant 0$, ce qui est difficilement compatible avec la condition $q > 0$.

   (b) La fonction f est dérivable et $f'(x) = x^{p-1} - 1$, quantité positive si $x \geqslant 1$, négative sinon (on suppose ici la fonction f définie sur $]0, +\infty[$, le nombre p n'ayant aucune raison d'être entier). La fonction f admet donc un minimum atteint pour $x = 1$, de valeur $f(1) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1 = 0$ par hypothèse. La fonction f est donc toujours positive, ce qui revient bien à dire que $x \leqslant \dfrac{1}{p}x^p + \dfrac{1}{q}$.

   (c) Posons donc $x = \dfrac{a}{b^{q-1}}$ (quelle inspiration géniale !), alors $\dfrac{a}{b^{q-1}} \leqslant \dfrac{1}{p} \times \dfrac{a^p}{b^{pq-p}} + \dfrac{1}{q}$, donc en multipliant tout par b^q, $ab \leqslant \dfrac{1}{p} \times \dfrac{a^p}{b^{pq-p-q}} + \dfrac{b^q}{q}$. Or, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ donc $q + p = qp$. Autrement dit, $pq - p - q = 0$, et l'inégalité obtenue peut bien s'écrire $ab \leqslant \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$.

   Dans le cas particulier $p = q = 2$ (qui vérifient bien $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$), on retrouve $ab \leqslant \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2}$.

   (d) On peut déjà constater, en testant l'inégalité avec $a = b = 1$, qu'on doit nécessairement avoir $1 \leqslant \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$. Reste à demontrer l'inégalité dans l'autre sens pour pouvoir conclure que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Si on suppose que l'inégalité de Young $ab \leqslant \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ est vraie pour tout couple de réels positifs, alors on peut l'appliquer pour $a = x^{\frac{1}{p}}$ et $b = x^{\frac{1}{q}}$, avec $x > 0$ quelconque. On en déduit que $x^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \leqslant \dfrac{x}{p} + \dfrac{x}{q}$, ou encore que $x^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1} \leqslant \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$. Si on avait $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} > 1$, on aurait $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1 > 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1} = +\infty$, ce qui est en contradition violente avec l'inégalité qu'on vient d'obtenir (le membre de droite en est constant !). On n'a pas d'autre choix qu'avoir $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1 \leqslant 0$ (dans ce cas, la limite de la quantité de gauche est égale à 1 ou 0, ce qui ne pose aucun problème). Comme on a déjà vu que $1 \leqslant \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$, on conclut bien à la nécessité d'avoir $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
4. (a) La fonction g est dérivable et vérifie $f'(x) = e^{x-1}$, donc $f'(1) = 1$. On a également $f(1) = 1$, donc l'équation de la tangente est donnée par $y = x - 1 + 1 = x$.

   (b) La fonction g est convexe (trivial), donc sa courbe est située au-dessus de ses tangentes, ce qui prouve directement l'inégalité demandée.

   (c) On applique simplement l'inégalité précédente aux nombres $\dfrac{x_i}{m}$, puis on multiplie toutes les majorations (tout est positif, ça ne pose aucun problème) pour obtenir ce qui est demandé.

   (d) Le produit d'exponentielles à droite peut s'écrire comme une exponentielle de somme. Or, $\dfrac{x_1}{m} - 1 + \cdots + \dfrac{x_n}{m} - 1 = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{m} - n = \dfrac{nm}{m} - n = 0$. Autrement dit, on a en fait prouvé que $\dfrac{x_1 x_2 \ldots x_n}{m^n} \leqslant e^0 = 1$, soit $x_1 \ldots x_n \leqslant m^n$ (encore une fois, tout est positif, on peut multiplier par m^n sans problème). Il ne reste qu'à prendre les racines n-èmes à gauche et à droite pour avoir l'inégalité $(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant m$. Dans le cas où $n = 2$, $m = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ et on a donc prouvé à nouveau que $\sqrt{x_1 x_2} \leqslant \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, c'est-à-dire exactement l'inégalité arithmético-géométrique.

5. (a) L'inégalité P_1 affirme que $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \geqslant \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, ce qui ne devrait pas prendre trop de temps à démontrer.

   (b) Calculons brillamment la différence : $(a^2+c^2)(b^2+d^2) - (ab+cd)^2 = a^2b^2 + a^2d^2 + c^2b^2 + c^2d^2 - a^2b^2 - c^2d^2 - 2abcd = (ad)^2 + (bc)^2 - 2abcd = (ad-bc)^2 \geqslant 0$. Cela prouve l'inégalité demandée.

   (c) En changeant simplement les notations, la propriété P_2 affirme que $\sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{b^2+d^2} \geqslant \sqrt{(a+b)^2+(c+d)^2}$. Tout étant positif, on peut élever au carré pour obtenir la condition équivalente $a^2 + c^2 + 2\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)} + b^2 + d^2 \geqslant (a+b)^2 + (c+d)^2$, soit en développant à droite et en simplifiant les carrés (puis en divisant par 2 tant qu'on y est) $\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)} \geqslant ab+cd$. C'est exactement ce qu'on vient de démontrer (à un dernier passage au carré près).

   (d) On a déjà prouvé les cas $n = 1$, et même $n = 2$, inutile pour l'initialisation de la récurrence, mais qui va nous servir pour l'hérédité. Supposons la propriété vraie au rang n, et cherchons à majorer $\sqrt{(x_1 + \dots + x_n + x_{n+1})^2 + (y_1 + \dots + y_n + y_{n+1})^2}$. En posant $X_1 = x_1 + \dots + x_n$, $X_2 = x_{n+1}$, $Y_1 = y_1 + \dots + y_n$ et $Y_2 = y_{n+1}$, la propriété P_2 nous permet d'affirmer que $\sqrt{(X_1+X_2)^2 + (Y_1+Y_2)^2} \leqslant \sqrt{X_1^2 + Y_1^2} + \sqrt{X_2^2 + Y_2^2} = \sqrt{(x_1 + \dots + x_n)^2 + (y_1 + \dots + y_n)^2} + \sqrt{x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2}$, et il ne reste plus qu'à majorer la première racine carrée à l'aide de l'hypothèse de récurrence pour obtenir exactement la propriété souhaitée au rang $n+1$. C'est magique !

   (e) On applique évidemment la propriété P_n en posant $x_i = a_i$ (pour tout entier i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant n$), et $y_i = 1 - a_{i+1}$ (avec $y_n = 1 - a_1$). En constantant que $x_1 + \dots + x_n = a_1 + \dots + a_n = S$ et $y_1 + \dots + y_n = 1 - a_2 + \dots + 1 - a_n + 1 - a_1 = n - S$, le résultat demandé est immédiat.

   (f) On sait déjà que notre quantité est minorée par $\sqrt{S^2 + (n-S)^2}$. Posons alors, à n fixé, $f(S) = S^2 + (n-S)^2$. Cette fonction est polynômiale de degré 2, décroissante puis croissante sur $\mathbb{R}$ et admet un miminimum atteint quand f' s'annule, avec $f'(S) = 2S - 2(n-S)$, donc $f'(S) = 0 \Leftrightarrow S = \dfrac{n}{2}$. Le minimum correspondant est égal à $f\left(\dfrac{n}{2}\right) = \dfrac{n^2}{4} + \dfrac{n^2}{4} = \dfrac{n^2}{2}$, ce qui prouve qu'on a toujours $\sqrt{S^2 + (n-S)^2} \geqslant \sqrt{\dfrac{n^2}{2}} = \dfrac{n\sqrt{2}}{2}$, et démontre donc la dernière inégalité demandée.