

Devoir Maison n° 2

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 2 octobre 2025

Exercice 1 : une équation fonctionnelle.

On cherche dans cet exercice à déterminer toutes les applications $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ vérifiant l'équation suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) + f \circ f(n) = 2n$.

1. Trouver une solution évidente au problème.
2. Soit f une solution quelconque du problème.
 - (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \in \{0, 1, \dots, 2n\}$.
 - (b) Déterminer la valeur de $f(0)$.
 - (c) Déterminer la valeur de $f(1)$.
 - (d) Montrer que f est nécessairement injective.
 - (e) Montrer par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n$ (autrement dit, en supposant que la relation $f(k) = k$ est vraie pour tous les entiers k inférieurs ou égaux à n , montrer que $f(n+1) = n+1$).
 - (f) Conclure.
3. Si vous avez du temps à perdre (considérez cette question comme une question bonus), demandez-vous s'il existe d'autres possibilités si on conserve la même équation fonctionnelle mais qu'on s'intéresse à des fonctions $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.

Exercice 2 : des inégalités classiques.

En anticipant un peu des choses qu'on verra en cours bientôt, mais peut-être après que vous ayez commencé à rédiger ce DM, on notera pour tout **réel** a et tout $x > 0$ le nombre $e^{a \ln(x)}$ sous la forme x^a . Autrement dit, on définit les puissances à exposant quelconque en utilisant les fonctions exponentielle et $\ln$. Cette définition généralise toutes les puissances que vous connaissez déjà (par exemple, on a bien $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} \ln(x)}$ pour tout $x > 0$) et surtout vérifie toutes les propriétés classiques du calcul sur les puissances. Par exemple, la règle de calcul $x^a \times x^b = x^{a+b}$ reste vraie pour des réels a et b quelconques.

1. Démontrer que, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, 2xy \leq x^2 + y^2$.
2. En déduire que, si a et b sont positifs, alors $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ (inégalité arithmético-géométrique).
3. Soient p et q deux réels strictement positifs vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
 - (a) Justifier que $p > 1$.
 - (b) Dresser le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q} - x$. En déduire que,
$$\forall x > 0, x \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}.$$

- (c) En appliquant l'inégalité précédente à un réel x soigneusement choisi, montrer l'inégalité de Young : si a et b sont strictement positifs, alors $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. Faire le lien avec l'inégalité démontrée à la première question.
- (d) Démontrer que l'inégalité de Young n'est vraie que si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (question difficile).
4. On pose pour cette question $g(x) = e^{x-1}$.
- (a) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de g en son point d'abscisse 1.
- (b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq e^{x-1}$ (si vous ne le connaissez pas déjà, renseignez-vous sur le lien entre convexité et position d'une courbe par rapport à ses tangentes).
- (c) Si $x_1, \dots, x_n$ sont n réels strictement positifs, on note $m = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$. Montrer que $\frac{x_1}{m} \times \frac{x_2}{m} \times \dots \times \frac{x_n}{m} \leq e^{\frac{x_1}{m}-1} e^{\frac{x_2}{m}-1} \dots e^{\frac{x_n}{m}-1}$.
- (d) En déduire que $(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq m$. Faire le lien avec l'inégalité démontrée à la deuxième question.
5. On note enfin P_n la propriété suivante, qui concerne des réels $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ quelconques : « $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} + \dots + \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \geq \sqrt{(x_1 + \dots + x_n)^2 + (y_1 + \dots + y_n)^2}$ ».
- (a) Que pensez-vous de la propriété P_1 ?
- (b) Montrer que, si a, b, c et d sont des réels quelconques, $(ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$.
- (c) En déduire que la propriété P_2 est vraie.
- (d) Démontrer par récurrence la propriété P_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ (pour l'hérédité, réutiliser le cas particulier $n = 2$ est une bonne idée).
- (e) Si $a_1, \dots, a_n$ sont des réels quelconques, on note $S = a_1 + \dots + a_n$. Montrer que $\sqrt{a_1^2 + (1-a_2)^2} + \sqrt{a_2^2 + (1-a_3)^2} + \dots + \sqrt{a_n^2 + (1-a_1)^2} \geq \sqrt{S^2 + (n-S)^2}$.
- (f) Montrer enfin que $\sqrt{a_1^2 + (1-a_2)^2} + \sqrt{a_2^2 + (1-a_3)^2} + \dots + \sqrt{a_n^2 + (1-a_1)^2} \geq \frac{n\sqrt{2}}{2}$.