Devoir Maison n^{o} 11 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

2 juin 2026

Problème d'analyse.

Première partie.

1. On peut tout simplement écrire $a(x) = \dfrac{2-x}{(1-x)^2} = \dfrac{1+1-x}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2} + \dfrac{1}{1-x}$. Il ne devrait alors plus y avoir de problème pour calculer une primitive (attention quand même aux signes dans les ln, $1-x > 0$ sur l'intervalle I) : $A : x \mapsto \dfrac{1}{1-x} - \ln(1-x)$ convient.
2. Après normalisation (qui ne pose aucun problème sur l'intervalle I), on se ramène à l'équation homogène du premier ordre $y' - a(x)y = 0$, qui admet pour solutions toutes les fonctions de la forme $y : x \mapsto Ke^{A(x)} = \dfrac{K}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}}$, avec $K \in \mathbb{R}$.
3. On utilise des composées de DL usuels : $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, donc, en posant $u = x + x^2 + x^3 + o(x^3)$ qui a une limite nulle quand x tend vers 0, $e^{\frac{1}{1-x}} = e \times e^u = e\left(1 + u + \dfrac{1}{2}u^2 + \dfrac{1}{6}u^3 + o(u^3)\right) = e\left(1 + x + x^2 + x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + x^3 + \dfrac{1}{6}x^3\right) + o(x^3) = e + ex + \dfrac{3}{2}ex^2 + \dfrac{13}{6}ex^3 + o(x^3)$. Il ne reste plus qu'à effectuer un petit produit : $f(x) = (1 + x + x^2 + x^3)\left(e + ex + \dfrac{3}{2}ex^2 + \dfrac{13}{6}ex^3\right) + o(x^3) = e + ex + \dfrac{3}{2}ex^2 + \dfrac{13}{6}ex^3 + ex + ex^2 + \dfrac{3}{2}ex^3 + ex^2 + ex^3 + ex^3 + o(x^3) = e + 2ex + \dfrac{7}{2}ex^2 + \dfrac{17}{3}ex^3 + o(x^3)$. Un calcul absolument palpitant.

Deuxième partie.

4. Allons-y donc pour une petite récurrence. Au rang 0, la formule est vérifiée en posant simplement $P_0 = X$. Supposons désormais la formule vrai au rang n, alors en dirivant la formule proposée, $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} P_n'\left(\dfrac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}} + \dfrac{1}{(1-x)^2} P_n\left(\dfrac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}} = P_{n+1}\left(\dfrac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}}$ en posant simplement $P_{n+1} = X^2(P'n + P_n)$. On a prouvé l'hérédité de notre récurrence et obtenu par la même occasion la relation de récurrence souhaitée.
5. On a déjà signalé à la question précédente que $P_0 = X$. Utilisons ensuite la relation de récurrence : $P_1 = X^2(1+X) = X^3+X^2$, puis $P_2 = X^2(3X^2+2X+X^3+X^2) = X^5+4X^4+2X^3$, et enfin $P_3 = X^2(5X^4 + 16X^3 + 6X^2 + X^5 + 4X^4 + 2X^3) = X^7 + 9X^6 + 18X^5 + 6X^4$. Ce sujet ne serait-il pas légèrement calculatoire, par hasard ?

6. On a vu en première partie que la fonction f était solution de l'équation (E) : $(x^2-2x+1)y' = (2-x)y$. Si on la dérive n fois (sous sa forme initiale et non sous forme normalisée), en utilisant la formule de Leibniz, on va obtenir $(x^2-2x+1)f^{(n+1)}(x) + n(2x-2)f^{(n)}(x) + n(n+1)f^{(n-1)}(x) = (2-x)f^{(n)}(x) - nf^{(n-1)}(x)$, soit $(x-1)^2 f^{(n+1)}(x) = 2n(1-x)f^{(n)}(x) + (2-x)f^{(n)}(x) - n^2 f^{(n-1)}(x)$. En remplaçant les dérivées de la fonction f par l'expression démontrée en question 4 et en supprimant les exponentielles (qui ne s'annulent jamais), on obtient la relation $(x-1)^2 P_{n+1}\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = 2n(1-x)P_n\left(\dfrac{1}{1-x}\right) + (2-x)P_n\left(\dfrac{1}{1-x}\right) - n^2 P_{n-1}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$. Posons $X = \dfrac{1}{1-x}$, la relation s'écrit alors sous la forme $\dfrac{P_{n+1}(X)}{X^2} = \dfrac{2nP_n(X)}{X} + \left(1+\dfrac{1}{X}\right)P_n(X) - n^2P_{n-1}(X)$, soit $P_{n+1}(X) = (2nX + X^2 + X)P_n(X) - n^2X^2P_{n-1}(X) = ((2n+1)X + X^2)P_n(X) - n^2X^2P_{n-1}(X)$. Cette relation n'est théoriquement valable que pour les valeurs de X pouvant être écrites sous la forme $\dfrac{1}{1-x}$, avec $x \in I$, mais comme cela représente en pratique tous les réels strictement positifs, la relation est valable sur un sous-ensemble infini de $\mathbb{R}$, et les polynômes formels sont donc bien égaux (principe d'identification des coefficients).

Troisième partie.

7. En évaluant la formule de la question 4 pour $x = 0$, on obtient $f^{(n)}(0) = P_n(1) \times e^1 = eP_n(1)$. Or, la relation obtenue en question 6, évaluée en 1, prouve que $P_{n+1}(1) = (2n+2)P_n(1) - n^2P_{n-1}(1)$, donc en multipliant tout par la constante e, on a $a_{n+1} = (2n+2)a_n - n^2a_{n-1}$.

8. (a) Si on ne s'est pas plantés plus haut dans le calcul du DL à l'ordre 3 de f en 0, les coefficients de ce développement limité sont respectivement égaux à $f(0) = a_0$, $f'(0) = a_1$, $\dfrac{f''(0)}{2} = \dfrac{a_2}{2}$ et $\dfrac{f'''(0)}{6} = \dfrac{a_3}{6}$ d'après la formule de Taylor-Young. On en déduit directement $a_0 = e$, $a_1 = 2e$, $a_2 = 7e$ et $a_3 = 34e$. La formule qu'on vient d'obtenir, appliquée avec $n = 3$, permet alors de calculer $a_4 = 8a_3 - 9a_2 = 272e - 63e = 209e$. Les calculs de ce problème sont vraiment de plus en plus sympathiques.

   (b) Toujours en appliquant Taylor-Young, mais dans l'autre sens, le DL demandé est donc $f(x) = e + 2ex + \dfrac{7}{2}ex^2 + \dfrac{17}{3}ex^3 + \dfrac{209}{24}ex^4 + o(x^4)$.

9. Si on applique l'inégalité de Taylor-Lagrange sur l'intervalle $[0,1]$, on sait que l'exponentielle (et donc toutes ses dérivées) sera majorée sur l'intervalle par e. On en déduit alors que $\left| e^1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{e^0}{k!}(1-0)^k \right| \leqslant \dfrac{e}{(n+1)!}$, soit $0 \leqslant |e - u_n| \leqslant \dfrac{e}{(n+1)!}$. Une simple application du théorème des gendarmes permet alors de conclure à la convergence de la suite (u_n) vers e.

10. (a) Par définition, $S_p(0) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \frac{i!}{(i!)^2} = \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!} = u_p$, puis $S_p(1) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \frac{(i+1)!}{(i!)^2} = \sum_{i=0}^{p} \frac{i+1}{i!} = \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!} + \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(i-1)!} = u_p + u_{p-1}$ après un tout petit décalage d'indice.

    (b) Trivialement au vu des questions précédentes, $\lim_{p\to+\infty} S_p(0) = e$ et $\lim_{p\to+\infty} S_p(1) = 2e$.

11. Allons-y pour un gros calcul bourrin : $S_p(n+1) - (2n+2)S_p(n) + n^2S_p(n-1)$

$$= \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+1+i)! - (2n+2)(n+i)! + n^2(n-1+i)!}{(i!)^2}$$

$$= \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+1+i)(n+i)(n-1+i)! - (2n+2)(n+i)(n-1+i)! - n^2(n-1+i)!}{(i!)^2}$$

$= \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \frac{(n^2+2in+n+i^2+i-2n^2-2ni-2n-2i+n^2)(n-1+i)!}{(i!)^2}$

$= \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \frac{(i^2-i-n)(n-1+i)!}{(i!)^2} = \sum_{i=1}^{p} \frac{(n-1+i)!}{(i-1)!^2} - \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2} = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(n+i)!}{(i!)^2} - \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2}$

$= S_{p-1}(n) - S_p(n)$ avec un tout petit décalage d'indice pour la première somme (où on a isolé le i^2 du numérateur précédent et simplifié avec la factorielle du dénominateur lorsque $i \geqslant 1$).

12. C'est une récurrence double essentiellement triviale, mais il faut bien faire attention à ce qu'on fait : c'est l'indice n qui varie, avec p fixé. On sait déjà (question 10) que les deux premières séries $(S_p(0))$ et $(S_p(1))$ convergent, ce qui valide l'initialisation double de notre récurrence. Si on suppose maintenant que $(S_p(n-1))$ et $(S_p(n))$ convergent pour un certain entier $n \geqslant 1$, alors on a $S_p(n+1) = (2n+1)S_p(n) - n^2 S_p(n-1) + S_{p-1}(n)$, qui est une somme de séries convergentes, donc convergente (la série $(S_{p-1}(n))$ est une série à termes positifs majorée par $(S_p(n))$, donc elle converge). Ceci prouve l'hérédité de notre récurrence, donc toutes ces séries convergent bien.

13. Il s'agit donc de prouver que $a_n = \lim\limits_{p \to +\infty} S_p(n)$. On a déjà calculé plus haut $\lim S_p(0) = e = a_0$ et $\lim S_p(1) = 2e = a_1$, ce qui va nous procurer l'initialisation double d'une nouvelle récurrence. Supposons comme ci-dessus que $(S_p(n-1))$ et $(S_p(n))$ convergent respectivement vers a_{n-1} et vers a_n. Remarquons par ailleurs que $S_{p-1}(n)$ a la même limite (a_n) que $(S_p(n))$ (on a juste décalé l'indice). La relation de la question 11 montre alors que $(S_p(n+1))$ converge vers $(2n+2)a_n - n^2 a_{n-1} + a_n - a_n = (2n+2)a_n - n^2 a_{n-1} = a_{n+1}$ d'après la relation de récurrence de la question 7 sur la suite (a_n). Cette récurrence double prouve bien que les limites des suites $(S_p(n))$ coïncident avec les termes de la suite (a_n).

    Pour obtenir la dernière formulation, il suffit de constater que $\dfrac{(n+i)!}{(i!)^2} = \dfrac{n!}{i!} \times \dfrac{(n+i)!}{n!i!} = \dfrac{n!}{i!} \times \dbinom{n+i}{n}$.

Problème d'algèbre.

Première partie.

1. L'expression explicite correspondant à la matrice J est $f(x,y,z) = (y,z,x)$. On en déduit immédiatement que $f(1,1,1) = (1,1,1)$, et donc $f(u) = u$. Par ailleurs, tout vecteur appartenant à Q, et vérifiant donc $x+y+z=0$, vérifie aussi $y+z+x=0$, donc a une image appartenant à Q, ce qui prouve la stabilité du plan Q (un nom toujours délicat à donner à un plan, soit dit en passant).

2. (a) Commençons par calculer $(1,1,1) \wedge \left(1, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right) = \left(0, \dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$. Par bilinéarité du produit vectoriel, on en déduit que $w = \left(0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Les deux vecteurs v et w n'étant pas proportionnels et appartenant tous les deux à Q (la somme de leurs coordonnées est nulle), ils forment une famille libre de vecteur de Q, et donc une base (le terme « plan » sous-entend que Q est de dimension 2, mais on peut le redémontrer rapidement en constatant que $Q = \mathrm{Vect}((1,-1,0),(1,0,-1))$ par exemple).

(b) La famille en question ne risque pas d'être orthonormale puisque le vecteur v n'est pas de norme 1 (et w non plus d'ailleurs) : $\| v \| = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Par contre, on peut s'amuser à constater que $u \cdot v = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, donc les vecteurs u, v et w sont orthogonaux deux à deux (par définition, un produit vectoriel est toujours orthogonal aux deux vecteurs à partir desquels il est construit), ce qui prouve que la famille (u, v, w) est une base orthogonale de E (une famille de vecteurs deux à deux orthogonaux est toujours une base dans $\mathbb{R}^n$, on en reparlera plus tard en cours).

(c) Calculons donc $f(v) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) = -\frac{1}{2}v + \left(0, -\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2}v - \frac{\sqrt{3}}{2}w$, et $f(w) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}v + \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}v - \frac{1}{2}$. Ces deux images vérifient les relations de l'énoncé si $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$ et $\sin(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, ce qui fonctionne pour $\theta = -\frac{2\pi}{3}$.

(d) La famille (v, w) est une base orthogonale du plan Q, et les images calculées ci-dessus montrent que l'application f effectue sur ces deux vecteurs (et donc sur le plan engendré) une rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3}$. Si les formules obtenues ne vous évoquent pas (encore) une rotation, ce sera le cas une fois qu'on aura fait ensemble le dernier chapitre d'algèbre, consacré aux espaces euclidiens.

Deuxième partie.

3. (a) On a donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$.

(b) Puisque $j^2 = \overline{j}$, on calcule $P\overline{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & 1 + j^2 + j & 1 + j + j^2 \\ 1 + j + j^2 & 1 + 2j^3 & 1 + j^2 + j^4 \\ 1 + j^2 + j & 1 + j^4 + j^2 & 1 + 2j^3 \end{pmatrix}$. En se rappelant que $j^3 = 1$, donc $j^4 = j$, et que $1 + j + j^2 = 0$ (somme des racines cubiques de l'unité), tout ça se simplifie beaucoup puisque $P\overline{P} = 3I$.

4. (a) Cela revient exactement à calculer, sous forme de vecteurs-colonnes, les images des vecteurs par l'application f (étendue à des vecteurs à coordonnées complexes, ce qui ne change pas son expression). On sait déjà que $f(1, 1, 1) = (1, 1, 1)$, donc $JX_1 = X_1$. De même, $f(1, j, j^2) = (j, j^2, 1) = (j, j^2, j^3) = j(1, j, j^2)$, donc $JX_2 = jX_2$ (on remaquera les notations particulièrement intelligentes choisies dans cet énoncé). Enfin, $f(1, j^2, j) = (j^2, j, 1) = (j^2, j^4, j^3) = j^2(j^2, j, 1)$, donc $JX_3 = j^2X_3$.

(b) On vient de prouver à la question précédente que les trois vecteurs X_1, X_2 et X_3 étaient des vecteurs propres de l'application f, associés respectivement aux valeurs propres 1, j et j^2. Comme P est par définition la matrice de passage de la base canonique vers la base constituée de ces trois vecteurs, on a directement $\Delta = P^{-1}JP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$.

5. (a) Trivialement, I, J et J^2 commutent avec I, donc toute combinaison linéaire de ces trois matrices également. Notons en passant que $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, et accessoirement que

$J^3 = I$, ce qui justifie probablement l'emploi de la lettre J pour noter cette matrice. Si on considère désormais une matrice quelconque $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, un calcul absolument passionnant donne $MJ = \begin{pmatrix} c & a & b \\ f & d & e \\ i & g & h \end{pmatrix}$, et $JM = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{pmatrix}$. La matrice M commute donc avec J si et seulement si $c = d = h$, $a = e = i$ et $b = f = g$. Or, dans ce cas, on constate que $M = aI + bJ + cJ^2$, ce qui prouve bien que $C(J) = \text{Vect}(I, J, J^2)$.

(b) Les trois matrices I, J et J^2 forment une famille libre (non, pas de calcul pour vérifier ça, c'est vraiment trop trivial), donc une base de $C(J)$, qui est donc de dimension 3.

6. (a) On sait déjà que $P^{-1}JP = \Delta$, matrice diagonale définie plus haut. On en déduit $P^{-1}J^2P = (P^{-1}JP)^2 = \Delta^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j^2 & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix}$. Par ailleurs, on a bien sûr $P^{-1}IP = I$, donc $D(a, b, c) = P^{-1}M(a, b, c)P = aI + b\Delta + c\Delta^2 = \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+bj+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a+bj^2+cj \end{pmatrix}$.

(b) On a manifestement $\det(D(a, b, c)) = \det(P^{-1}M(a, b, c)P) = \det(P^{-1})\det(M(a, b, c))\det(P) = \det(M(a, b, c))$, donc les deux déterminants sont égaux. Autant calculer le plus simple, celui de la matrice diagonale : $\det(D(a, b, c)) = (a + b + c)(a + bj + bj^2)(a + bj^2 + cj)$.

(c) Développons le produit précédent (oui, ça va donner 27 termes), en simplifiant quand mêmes les $j^3 = 1$ et $j^4 = j$: $a^3 + a^2bj^2 + a^2cj + a^2bj + ab^2 + abcj^2 + a^2cj^2 + abcj + ac^2 + a^2b + ab^2j^2 + abcj + ab^2j + b^3 + b^2cj^2 + abcj^2 + b^2cj + bc^2 + a^2c + abcj^2 + ac^2j + abcj + b^2c + bc^2j^2 + ac^2j^2 + bc^2j + c^3 = a^3 + b^3 + c^3 + a^2b(j^2 + j + 1) + ab^2(1 + j^2 + j) + a^2c(j + j^2 + 1) + ac^2(1 + j + j^2) + b^2c(j^2 + j + 1) + bc^2(1 + j^2 + j) + abc(j^2 + j + j + j^2 + j^2 + j)$. Oh, mais $1 + j + j^2 = 0$, donc il ne reste que $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc(-j - j^2) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$. Bon, ok, j'admets que j'ai fait ce calcul immonde alors qu'il n'est absolument pas nécessaire une fois qu'on connait quelques techniques de calcul de déterminant (on obtient par exemple rapidement $\det(M(a, b, c)) = a^3+b^3+c^3-3abc$ en développant directement ce déterminant par rapport à n'importe quelle ligne ou colonne).

(d) Bien entendu, la matrice est singulière seulement si son déterminant est nul, donc si l'un des trois facteurs obtenus à la question précédente est nul. Si $a+b+c = 0$, alors le triangle ABC a pour centre de gravité O. Si $a + bj + cj^2 = 0$, alors $a + bj + c(-1 - j) = 0$, donc $a-c+j(b-c) = 0$, donc $a-c = -j(b-c) = e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-c)$, ou encore $\dfrac{a-c}{b-c} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Mais cette égalité signifie exactement que A est l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$, et dans ce cas le triangle ABC est équilatéral. Même conclusion si $a + bj^2 + cj = 0$ en échangeant le rôle de B et de C. La réciproque est évidente (si ABC est équilatéral, alors on peut voir A comme image de B par une rotation centrée en C, ou de C par une rotation centrée en B selon que le triangle est direct ou indirect).

Troisième partie.

7. Il y a quand même un petit calcul à faire. Les relations de récurrence données dans l'énoncé pour les trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) reviennent exactement à écrire l'égalité matricielle $Y_{n+1} = (\lambda J + (1-\lambda)J^2)Y_n$. Comme $Z_n = P^{-1}Y_n$, donc $Y_n = PZ_n$, on en déduit que $Z_{n+1} = P^{-1}Y_{n+1} = P^{-1}(\lambda J + \lambda J^2)PZ_n$. Or, les calculs effectués dans la partie précédente prouvent que $\lambda P^{-1}JP + (1-\lambda)P^{-1}J^2P$ est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont respectivement égaux à $\lambda + 1 - \lambda = 1$, $\lambda j + (1-\lambda)j^2$ et $\lambda j^2 + (1-\lambda)j$, soit exactement la relation demandée dans l'énoncé.

8. Il s'agit donc de calculer $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda j + (1-\lambda)j^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\lambda)j + \lambda j^2 \end{pmatrix}^n$ $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda j + (1-\lambda)j^2)^n & 0 \\ 0 & 0 & ((1-\lambda)j + \lambda j^2)^n \end{pmatrix}$. N'essayons même pas de simplifier les expressions des deux derniers coefficients diagonaux, ça ne donnera rien de sympathique.

9. (a) Une suite géométrique converge si sa raison a un module strictement inférieur à 1. Ici, on veut donc $|\lambda j + (1-\lambda)j^2|^2 < 1$, soit $(\lambda j + (1-\lambda)j^2)(\lambda \overline{j} + (1-\lambda)\overline{j^2}) < 1$. Or, $\overline{j} = j^2$ et $\overline{j^2} = j$, donc on obtient la condition $\lambda^2 + \lambda(1-\lambda)j^2 + \lambda(1-\lambda)j + (1-\lambda)^2 < 1$, soit $2\lambda^2 - 2\lambda + 1 - \lambda(1-\lambda) < 1$, donc $3\lambda^2 - 3\lambda < 0$ (en se rappellant en cours de route que $1+j+j^2 = 0$, donc $j+j^2 = -1$). Cette inégalité est vraie quand $\lambda(\lambda-1) < 0$, donc $\lambda \in]0,1[$ (ici, λ est un réel et pas un complexe !). Si on veut être tout à fait complet, il faut ajouter que la suite converge aussi si sa raison est exactement égale à 1 (suite constante, les autres valeurs de la raison de module 1 peuvent donner des suites périodiques, mais jamais des suites convergentes), donc si $\lambda j + (1-\lambda)j^2 = 1$, soit $-\frac{1}{2}\lambda + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda i + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda i$. Pour que cette raison soit égale à 1, on doit à la fois avoir $\lambda = -\frac{1}{2}$ (pour la partie réelle) et $\lambda = \frac{1}{2}$ (pour la partie imaginaire), ce qui ne peut évidemment pas se produire simultanément. La raison ne sera donc jamais égale à 1, et seules les valeurs de λ dans l'intervalle $]0,1[$ produiront une suite convergente.

   (b) Une récurrence triviale permet de prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Z_n = (D(0,\lambda,1-\lambda))^n Z_0$ (l'hérédité est directement donnée par la relation démontrée en question 7). Or, si $\lambda \in]0,1[$, les trois coefficients diagonaux de la matrice $(D(0,\lambda,1-\lambda))^n$ convergent, le troisième étant simplement le conjugué du deuxième. La convergence des trois coefficients de Z_n en découle, puis celle des coefficients de Y_n en multipliant par la matrice P (ce qui revient à effectuer des combinaisons linéaires des coefficients de Z_n pour obtenir ceux de Y_n, on conservera donc la convergence).

10. (a) À l'aide des relations de récurrence données dans l'énoncé, on a immédiatement $a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = \lambda b_n + (1-\lambda)c_n + \lambda c_n + (1-\lambda)a_n + \lambda a_n + (1-\lambda)b_n = a_n + b_n + c_n$.

   (b) Notons l_1, l_2 et l_3 les limites respectives des trois suites. En passant à la limite dans les relations de récurrence, on trouve $l_1 = \lambda l_2 + (1-\lambda)l_3$, $l_2 = \lambda l_3 + (1-\lambda)l_1$ et $l_3 = \lambda l_1 + (1-\lambda)l_2$. Substituons par exemple la première équation dans la deuxième : $l_2 = \lambda l_3 + \lambda(1-\lambda)l_2 + (1-\lambda)^2 l_3$, soit $(1-\lambda+\lambda^2)l_2 = (1-\lambda+\lambda^2)l_3$. Or, $1-\lambda+\lambda^2$ ne risque pas de s'annuler (ce trinôme n'a pas de racine réelle), donc on peut en déduire $l_2 = l_3$. Ensuite, on obtient $l_1 = l_2$ en reprenant la première équation, donc on a bien $l_1 = l_2 = l_3$.

   (c) Notons l la limite commune des trois suites, alors $(a_n + b_n + c_n)$ converge vers $3l$. Or, cette suite est constante (question 10.a), donc sa limite $3l$ est égale à son premier terme $a + b + c$. On a donc $l = \frac{1}{3}(a+b+c)$. Autrement dit, la suite de triangles « converge » vers un point qui est le centre de gravité du triangle initial.