

Devoir Maison n° 11 : Petites Mines 2004

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 2 juin 2026

Pour réviser un peu avant le devoir bilan début juin, voici le sujet complet d'une des épreuves de mathématiques posées au concours d'entrée des Petites Mines en 2004. Oui, ça date un peu, mais le concours en question a été supprimé en 2010, et c'était le seul à être accessible aux élèves en fin de première année. Le sujet est constitué de deux problèmes, un d'analyse et un d'algèbre (pas de probas au programme de MPSI à l'époque), et les candidats devaient bien sûr traiter les deux problèmes en quatre heures. J'ai à peine dépoussiéré l'énoncé initial pour mieux faire coller quelques questions au programme actuel. Bien sûr, il n'est pas très dur de trouver des corrigés de ce sujet en ligne, mais le but est de le traiter par vous-même, si possible en temps limité.

Problème d'analyse.

Première partie.

Soit (E) l'équation différentielle : $(1-x)^2 y' = (2-x)y$. On note I l'intervalle $] -\infty, 1[$.

1. Calculer une primitive A de la fonction a définie sur I par $a(x) = \frac{2-x}{(1-x)^2}$.

2. Résoudre l'équation (E) sur I .

Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = \frac{1}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}}$.

3. Calculer le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 3.

Deuxième partie.

4. Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n , il existe un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = P_n \left(\frac{1}{1-x} \right) e^{\frac{1}{1-x}}$ pour tout réel x appartenant à I . La démonstration permet d'exprimer P_{n+1} en fonction de P_n , P'_n et X . Expliciter cette relation.

5. Préciser P_0 , P_1 , P_2 et P_3 .

6. En dérivant n fois les deux membres de l'équation (E) , prouver que pour tout entier positif n , $P_{n+1} = ((2n+1)X + X^2)P_n - n^2 X^2 P_{n-1}$.

Troisième partie.

Le but de cette partie est d'établir quelques propriétés des nombres $a_n = f^{(n)}(0)$.

7. Pour tout entier positif n , exprimer a_{n+1} en fonction de n , a_n et a_{n-1} .

8. (a) Préciser, sans nouveau calcul, les valeurs de a_0 , a_1 , a_2 et a_3 . En déduire a_4 .

(b) Préciser le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 4.

9. On désigne par (u_p) la suite définie pour tout entier naturel p par : $u_p = \sum_{i=0}^p \frac{1}{i!}$. En appliquant une formule de Taylor à la fonction exponentielle, prouver que la suite (u_p) converge vers e (Note du prof de maths : bien sûr, ce résultat est maintenant considéré comme une question de cours pour vous, mais rien ne vous empêche de tenter de faire la démonstration à l'aide de Taylor-Lagrange).

p et n désignant des entiers naturels quelconques, on pose : $S_p(n) = \sum_{i=0}^p \frac{(n+i)!}{(i!)^2}$.

10. (a) Exprimer $S_p(0)$ et $S_p(1)$ à l'aide de u_p et u_{p-1} pour $p \geq 1$.
 (b) Prouver que les suites $(S_p(0))$ et $(S_p(1))$ convergent et préciser leur limite en fonction de e .
11. Prouver que quels que soient les entiers p et n supérieurs ou égaux à 1, $S_p(n+1) - (2n+2)S_p(n) + n^2S_p(n-1) = S_{p-1}(n) - S_p(n)$.
12. En déduire que pour tout entier naturel n , la série $S_p(n)$ converge.
13. Prouver que $a_n = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(n+i)!}{(i!)^2} = n! \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{n+i}{n} \times \frac{1}{i!}$.

Problème d'algèbre.

Première partie.

On notera I la matrice I_3 et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On notera également $E = \mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) .

Soit f l'endomorphisme de E ayant pour matrice J dans la base canonique, et $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.

- Calculer $f(u)$ et prouver que le plan Q d'équation $x + y + z = 0$ est stable par f (c'est-à-dire que l'image par f de tout vecteur de Q appartient à Q).
- On pose $v = \left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et $w = u \wedge v$ (oui, il s'agit bien d'un produit vectoriel).
 - Calculer w , et vérifier que (v, w) est une base du plan Q .
 - La famille (u, v, w) est-elle une base orthonormée directe de E (pour répondre à cette question, on a bien sûr le droit de calculer des normes et des produits scalaires de vecteurs en utilisant les formules vues au lycée) ?
 - Trouver un réel θ tel que $f(v) = \cos(\theta)v + \sin(\theta)w$ et $f(w) = -\sin(\theta)v + \cos(\theta)w$.
 - Que pensez-vous de la nature géométrique de la restriction de f à Q (le but est de reconnaître une application géométrique simple) ?

Deuxième partie.

Pour tout vecteur $t = (x, y, z) \in E$, on note $[t] = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ la matrice-colonne de ses coordonnées dans la base canonique. On définit ainsi les matrices colonnes à coefficients complexes $X_1 = \sqrt{3}[u]$, $X_2 = [v] + i[w]$ et $X_3 = [v] - i[w]$ et on désigne par P la matrice carrée d'ordre 3 définie par $P = (X_1 \ X_2 \ X_3)$ (les colonnes de P sont les trois matrices-colonnes X_1 , X_2 et X_3).

3. (a) Exprimer les coefficients non réels de P en fonction de $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
 (b) Soit \bar{P} la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de P . Exprimer le produit $P\bar{P}$ en fonction de la matrice I .
4. (a) Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, calculer JX_i en fonction de X_i .
 (b) En déduire une matrice diagonale Δ telle que $\Delta = P^{-1}JP$.
5. (a) Prouver que l'ensemble $C(J)$ des matrices M qui commutent avec J est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ engendré par I , J et J^2 .
 (b) Donner une base et la dimension de $C(J)$.
6. a , b et c désignant des nombres complexes quelconques, on note $M(a, b, c) = aI + bJ + cJ^2$.
 (a) Calculer la matrice $D(a, b, c) = P^{-1}M(a, b, c)P$, en utilisant le résultat de la question 4.b).
 (b) Calculer de façon indépendante les déterminants de $M(a, b, c)$ et $D(a, b, c)$ (petite aide ici : le déterminant d'un produit est toujours égal au produit des déterminants, et le déterminant d'une matrice diagonale est le produit de ses coefficients diagonaux).
 (c) En développant le déterminant précédent (si ça n'a pas déjà été fait), en déduire une factorisation de $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ comme produit de trois expressions de la forme $\alpha a + \beta b + \gamma c$.
 (d) On suppose que a , b , c sont distincts et on considère ces nombres comme les affixes respectives des sommets A , B , C d'un triangle (T) dans un plan complexe d'origine O . Prouver que la matrice $M(a, b, c)$ est singulière (autrement dit non inversible) si et seulement si (T) est équilatéral ou si O est son centre de gravité.

Troisième partie.

On reprend les notations de la question précédente et on construit par récurrence une suite (T_n) de triangles de sommets A_n , B_n et C_n en posant $(T_0) = (T)$ puis, λ désignant un nombre réel, pour tout entier naturel n , (T_{n+1}) est le triangle dont les sommets A_{n+1} , B_{n+1} et C_{n+1} sont tels que $z_{A_{n+1}} = \lambda z_{B_n} + (1-\lambda)z_{C_n}$, $z_{B_{n+1}} = \lambda z_{C_n} + (1-\lambda)z_{A_n}$ et $z_{C_{n+1}} = \lambda z_{A_n} + (1-\lambda)z_{B_n}$.

On note a_n , b_n et c_n les affixes respectives des sommets A_n , B_n et C_n , mais aussi $Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, et $Z_n = P^{-1}Y_n$.

7. Prouver que pour tout entier n , $Z_{n+1} = D(0, \lambda, 1-\lambda)Z_n$ (oui, je sais, autant de notations pour déboucher sur une question aussi débile, c'est un peu décevant).
8. Expliciter les coefficients de la matrice $(D(0, \lambda, 1-\lambda))^n$.
9. (a) Prouver que la suite $(\lambda j + (1-\lambda)j^2)^n$ converge si et seulement si λ appartient à un intervalle à préciser.
 (b) Prouver que si cette condition est réalisée, les suites (a_n) , (b_n) et (c_n) convergent.
10. (a) Exprimer $a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1}$ en fonction de $a_n + b_n + c_n$.
 (b) Prouver que les suites (a_n) , (b_n) et (c_n) ont la même limite.
 (c) Exprimer cette limite en fonction de a , b et c . Interpréter géométriquement le résultat obtenu.