

Devoir Maison n° 10 (Capes 2026) : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

28 avril 2026

Problème 1 : Vrai-Faux.

Calculs dans \mathbb{R}

1. FAUX, on ne peut pas soustraire des inégalités membre à membre ! D'ailleurs, on trouve facilement des contre-exemples : $x = 2$ et $y = 4$ vérifient les deux inégalités mais $x - y = -2 \notin [-1, 2]$.
2. FAUX, si le taux d'évolution annuel moyen était de 3,5%, cela donnerait un produit de la cotisation par un facteur 1.035 chaque année, donc au bout de dix ans un produit par $1.035^{10} \simeq 1.41$, il s'agit d'une suite géométrique et non arithmétique.
3. FAUX, 1 est bien racine du polynôme mais pas 2 (c'est -2 qui est racine).
4. FAUX (tout est faux dans ce début d'énoncé...), il suffit de prendre trois entiers dont les seules valuations p -adiques non nulles sont celles correspondant aux facteurs 2 et 5 pour que leur inverse soit décimal, et la somme de trois nombres décimaux reste décimale. Par exemple $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = 0.5 + 0.2 + 0.1 = 0.8$.

Analyse réelle

5. VRAI, c'est un théorème vu en cours (pour la démonstration, on applique la définition de la limite, par exemple avec $\varepsilon = 1$ pour montrer que $u_n \in [l - 1, l + 1]$ à partir d'un certain rang, et comme seuls un nombre fini de termes de vérifient pas cet encadrement, l'ensemble de tous les termes est facilement majoré et minoré).
6. FAUX, la fonction est bien définie et dérivable sur \mathbb{R} , mais $f(x) = e^{x \ln(2)}$, ce qui donne une expression de dérivée égale à $f'(x) = \ln(2) \times 2^x$ (les variations seraient de toute façon incorrectes avec la formule de l'énoncé).
7. FAUX, on calcule facilement une expression explicite de $u_n : \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n = \frac{n(n+1)}{2n^2}$ a pour limite $\frac{1}{2}$ et pas du tout 0.
8. VRAI, on peut par exemple séparer ce qui se passe sur $[0, +\infty[$, où $f(x) = x^2$, et donc f est dérivable à droite en 0 avec $f'_d(0) = 0$, et ce qui se passe sur $] -\infty, 0]$, où $f(x) = -x^2$, et donc $f'_g(0) = 0$. Les dérivées à gauche et à droite en 0 étant égales, la fonction est bien dérivable en 0.
9. VRAI, on peut encadrer facilement I_n : si $0 \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$ lorsque $t \in [0, 1]$, donc par intégration des inégalités $\int_0^1 0 dt \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 t^n dt$, soit $0 \leq I_n \leq \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$, et le théorème des gendarmes assure la convergence de la suite vers 0.

10. VRAI, Le taux d'accroissement en $-a$ aura pour expression $\tau_{-a}(h) = \frac{f(-a+h) - f(-a)}{h} = \frac{f(a-h) - f(a)}{h} = -\tau_a(-h)$, qui aura donc une limite opposée quand h tend vers 0 à celle de $\tau_a(h)$.
11. FAUX, une de ces primitives sera impaire, mais si on ajoute une constante non nulle on va détruire l'imparité (une fonction impaire vérifie de toute façon toujours $f(0) = 0$, ce qui ne peut pas être le cas de toutes les primitives d'une fonction donnée).
12. FAUX, la primitive en question aura pour dérivée f et donc pour dérivée seconde $f' : x \mapsto 2xe^{x^2}$ qui est manifestement négative sur $]-\infty, 0]$.
13. FAUX, la fonction ne peut pas s'annuler sur $]-\infty, 0[$ (à la fois x et $\ln|e^x - 1|$ y sont strictement négatifs puisque $e^x - 1 \in]0, 1[$) et elle est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (comme somme de deux fonctions strictement croissantes) donc ne peut s'y annuler qu'une seule fois au maximum.

Arithmétique

14. FAUX, par exemple 5 est premier mais $5! + 1 = 121 = 11^2$ ne l'est pas. Tout ce qu'on peut dire, c'est que $n! + 1$ n'est divisible par aucun entier inférieur ou égal à n , mais il peut avoir des diviseurs plus gros ! Notons d'ailleurs que le suivant est aussi un carré : $7! + 1 = 5041 = 71^2$.
15. VRAI, il y a trois cas à distinguer : si $n \equiv 0[3]$, alors $n(n^2 + 5) \equiv 0[3]$ trivialement ; si $n \equiv 1[3]$ alors $n^2 \equiv 1[3]$ donc c'est cette fois-ci $n^2 + 5$ qui est divisible par 3 ; et si $n \equiv 2[3]$, alors on a aussi $n^2 \equiv 1[4]$ (puisque $4 \equiv 1[3]$), donc $n^2 + 5$ est à nouveau un multiple de 3. Dans tous les cas, le produit $n(n^2 + 5)$ est un multiple de 3.
16. VRAI, on cherche en fait les entiers vérifiant $\frac{n(n-1)}{2} - n = 9$, soit $n^2 - 3n - 18 = 0$, équation qui a pour discriminant $\Delta = 9 + 72 = 81$ et pour racines $n_1 = \frac{3-9}{2} = -3$ (non pertinente ici) et $n_2 = \frac{3+9}{2} = 6$, qui est la seule solution entière naturelle et qui est bien multiple de 3.

Géométrie et nombres complexes.

17. VRAI, le premier plan a pour vecteur normal $\vec{n}_1(1, -1, -1)$, le deuxième plan a pour vecteur normal $\vec{n}_2(3, -1, 1)$. Un vecteur directeur de la droite d'intersection des deux plans est obtenu en effectuant le produit vectoriel de ces deux vecteurs, ce qui donne $(-2, -4, 2)$, qui est bien colinéaire au vecteur \vec{v} donné dans l'énoncé. De plus, le point $A(1, -1, 0)$ a des coordonnées satisfaisant les deux équations de plan, dont appartient à l'intersection des deux. On notera en passant que les concepteurs d'énoncé de CAPES estiment que les termes « composantes » et « coordonnées » sont synonymes, ce qui n'est pas vraiment le cas...
18. FAUX, il ne faut pas se laisser abuser par le dessin, la droite (AI) n'est pas du tout parallèle au plan (ADE) contenant la droite (HK) donc n'est certainement pas parallèle à (HK) .
19. FAUX, les points étant distincts l'affirmation de l'énoncé est grotesque. En particulier, les points Ω et Ω' ne sont pas du tout laissés fixes par l'application composée (par exemple Ω ne bouge pas quand on applique la première homothétie mais va nécessairement bouger quand on lui applique l'homothétie de centre Ω').
20. VRAI, il s'agit d'une similitude directe puisque l'expression de l'application est de la forme $z \mapsto az + b$, et le fait que $a = -1$ implique que le rapport de la similitude est 1 (il s'agit donc d'une isométrie directe) et son angle π , ce qui est caractéristique d'une symétrie centrale, même si bien sûr on appelle ce genre de transformation « rotation d'angle π » quand on est un mathématicien sérieux.

21. FAUX, la négation de « machin et bidule » est « pas machin **ou** pas bidule », il suffit donc qu'un seul des deux nombres complexes ne soit pas réel dans la conclusion de la contraposée. Par ailleurs, cette question n'a finalement aucun rapport avec la géométrie et les nombres complexes.

Dénombrement et probabilités.

22. FAUX, il faut prendre en compte le fait qu'il y a un jeton rouge numéro 2. Il y a trois tirages comportant le jeton rouge 2 et un autre jeton qui n'est ni rouge ni 2, et quatre tirages comportant le jeton vert 2 et un jeton rouge n'ayant pas le numéro 2, ce qui ne fait pas vraiment dix tirages au total.
23. FAUX, le nombre proposé découle du raisonnement suivant : on choisit une urne sur les trois qui va être vide, et on a ensuite pour chaque boule deux choix possibles puisqu'il faut les caser dans une des deux urnes restantes. Mais en procédant ainsi on compte deux fois les cas où deux urnes sont vides. Il y a en fait trois cas où deux urnes sont vides, et $3(2^4 - 2) = 42$ (mais oui!) cas où une urne exactement est vide (on choisit l'urne vide et on élimine ensuite les deux cas où toutes les boules vont dans la même urne), soit 45 cas au total et non 48.
24. VRAI, l'événement $X = n$ est réalisé si on a tiré des jetons verts lors des n premiers tirages puis un jeton rouge au n -ème tirage. La probabilité de tirer un jeton vert au tirage numéro k sachant qu'on n'a tiré que des jetons verts jusque-là (et donc qu'on n'a ajouté que des jetons verts dans l'urne) vaut $\frac{k}{k+1}$ (au moment du tirage numéro k , on a toujours une seule boule rouge dans l'urne mais k boules vertes), donc la probabilité de ne tirer que des verts jusqu'au tirage $n-1$ vaut $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$. La probabilité de tirer la boule rouge au tirage n sachant qu'on a tiré que des verts avant vaut de même $\frac{1}{n+1}$, ce qui donne bien $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}$ (formules des probabilités composées si on veut faire savant).

Algèbre linéaire.

25. VRAI, $A^2 = 2A$ et ensuite c'est une récurrence triviale.
26. FAUX, on sait que $(AB)^\top = B^\top A^\top$, donc, avec l'hypothèse que les deux matrices sont symétriques, $(AB)^\top = BA$, mais il n'y a aucune raison que A et B commutent ! Par exemple avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient $AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, qui n'est plus du tout symétrique.

Problème 2 : calcul et géométrie.

I. Autour du triangle rectangle

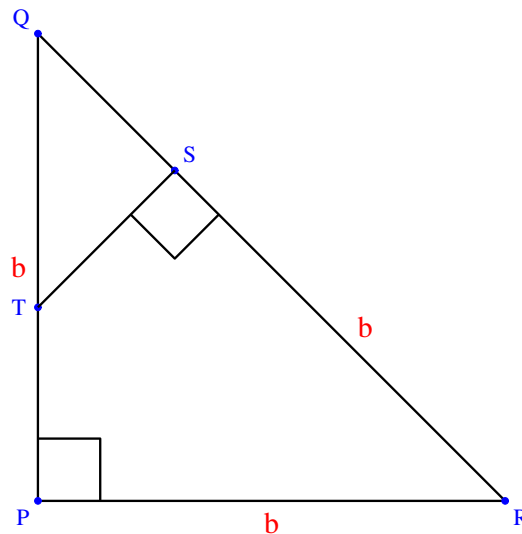
A. Une démonstration du théorème de Pythagore

1. Une rédaction façon collègue pour cette magnifique première question : les angles \widehat{ACB} et \widehat{ABC} sont complémentaires dans le triangle rectangle ABC , donc $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2} - \widehat{ACB}$ (non, je ne pousserai pas jusqu'à exprimer mes angles en degrés tout de même). Or, les triangles ABC et BDE étant identiques, $\widehat{DBE} = \widehat{ACB}$. On en déduit que $\widehat{ABC} + \widehat{DBE} = \frac{\pi}{2}$. L'angle \widehat{ABD} étant plat, $\widehat{CBE} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, donc les droites (BC) et (BE) sont bien perpendiculaires.

- Les droites (AC) et (DE) étant perpendiculaires à la même droite (AD) , elles sont parallèles, donc $ACED$ est un trapèze.
- Première méthode : on calcule directement l'aire du trapèze via la formule « moyenne des bases \times hauteur ». Ici, les bases parallèles ont pour longueurs b et c , et la hauteur du trapèze est la distance $AD = b + c$, donc l'aire du trapèze vaut $\frac{(b+c)^2}{2}$. Deuxième méthode : on additionne les aires des trois triangles rectangles ABC , BCE et BDE pour obtenir $\frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{bc}{2} = bc + \frac{a^2}{2}$. Autrement dit, on a $\frac{(b+c)^2}{2} = bc + \frac{a^2}{2}$, soit $\frac{a^2}{2} = \frac{(b+c)^2 - 2bc}{2} = \frac{b^2 + c^2}{2}$. On en déduit immédiatement $a^2 = b^2 + c^2$, c'est-à-dire l'énoncé du théorème de Pythagore.

B. Irrationalité de $\sqrt{2}$

- Par définition, $(\sqrt{2})^2 = 2 \in [1, 4]$, donc $1^2 < 2 < 2^2$. La fonction racine carrée étant croissante sur \mathbb{R}^+ , on en déduit $1 < \sqrt{2} < 2$.
- On sait que $\frac{a^2}{b^2} = 2$, donc $a^2 = 2b^2$. On peut en déduire que $a^2 - ab = 2b^2 - ab$, soit $a(a-b) = b(2b-a)$. Aucun de ces facteurs ne peut être nul, donc $\frac{a}{b} = \frac{2b-a}{a-b}$.
- Bon ben voici une superbe figure :



- Utilisons donc le super théorème démontré dans la partie précédente et connu sous le nom de théorème de Pythagore : $QR^2 = PQ^2 + PR^2 = 2b^2 = a^2$ puisque par hypothèse $\frac{b^2}{a^2} = 2$, donc $b^2 = 2a^2$. Bien entendu, une distance étant positive, on en déduit que $QR = a$.
- Le triangle est rectangle en S par construction, et l'angle \widehat{TQS} est le même que \widehat{PQR} , qui a pour mesure $\frac{\pi}{4}$ dans le triangle isocèle rectangle PQR , donc TQS est aussi isocèle rectangle.
- Puisque $QS = QR - SR = a - b$ et que le triangle est isocèle rectangle, $QT^2 = 2(a-b)^2 = 2a^2 + 2b^2 - 4ab = 3a^2 - 4ab$ d'après Pythagore. Or, $(2b-a)^2 = 4b^2 + a^2 - 4ab = 3a^2 - 4ab$,

donc on a également $TQ^2 = (2b - a)^2$, d'où $TQ = 2b - a$ (puisque $a < 2b$ donc $2b - a > 0$), puis $\frac{TQ}{SQ} = \frac{2b - a}{b - a}$.

10. Les triangles TQS et PQR étant semblables (isocèles rectangles tous les deux), les quotients de leurs hypothénuses par les longueurs de leurs côtés égaux sont identiques, ce qui donne $\frac{TQ}{SQ} = \frac{QR}{PR}$, donc $\frac{2b - a}{a - b} = \frac{a}{b}$. Or, comme $a < 2b$, $a - b < b$, ce qui prouve que la fraction $\frac{2b - a}{a - b}$ a un dénominateur (et donc un numérateur) strictement inférieur à celui de la fraction $\frac{a}{b}$. Quitte à supposer dès le départ que la fraction $\frac{a}{b}$ était une fraction irréductible égale à $\sqrt{2}$, on aboutit à une contradiction, ce qui prouve par l'absurde que $\sqrt{2}$ ne peut pas être rationnel.

II. Autour du triangle équilatéral

A. Irrationalité de $\sqrt{3}$

11. Commençons par constater que $1 < \sqrt{3} < 2$ (même démonstration que pour $\sqrt{2}$ un peu plus haut), donc $a < 2b$ et $2b - a > 0$. Mieux, $\sqrt{3} > \frac{3}{2}$ puisque $\frac{9}{4} < 3$, donc $2a > 3b$ et $2a - 3b > 0$. Maintenant qu'on sait que tout est positif, l'égalité proposée par l'énoncé est équivalente à $(2a - 3b)^2 = 3(2b - a)^2$, soit $4a^2 - 12ab + 9b^2 = 12b^2 - 12ab + 3a^2$, ou encore $a^2 = 3b^2$, ce qui est bien le cas avec l'hypothèse $\frac{a}{b} = \sqrt{3}$.
12. Si on note c le côté du triangle équilatéral, en coupant le triangle en deux moitiés isométriques par une de ses hauteurs, cette hauteur vérifie, via ce bon vieux théorème de Pythagore, $h^2 = c^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{3c^2}{4}$, donc $h = \frac{\sqrt{3}}{2}c$, donc l'aire du triangle vaut $\frac{c \times h}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$.
13. Puisque les côtés des deux triangles vérifient la relation $b = \sqrt{3}a$, on en déduit assez facilement que $b^2 = 3a^2$, donc $\frac{\sqrt{3}}{4}b^2 = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. On peut espérer que les seuls candidats du CAPES n'ayant pas les points à ce genre de question sont ceux qui se seront endormis sur leur sujet avant d'atteindre cette question.
14. On a déjà justifié l'encadrement plus haut. On a donc $2b > a$, ce qui explique le recouvrement (la somme des longueurs $AG + IB$ est par exemple supérieure à AB).
15. Le petit triangle IGN a ses deux angles \widehat{GIN} et \widehat{IGN} qui sont égaux aux angles \widehat{BIJ} et \widehat{AGH} , qui sont de mesure $\frac{\pi}{3}$ en tant qu'angles intérieurs des triangles équilatéraux IBL et AGH . C'est suffisant pour assurer que le triangle IGN est équilatéral. Un raisonnement identique prouve alors que KHM et PJL sont aussi des triangles équilatéraux. Enfin, les trois angles du triangle MNP sont opposés par le sommet (vous ne savez pas ce que sont des angles opposés par le sommet ? De mon temps, ça s'apprenait au collège...) aux angles \widehat{KMH} , \widehat{JPL} et \widehat{ING} , qui ont tous les trois pour mesure $\frac{\pi}{3}$ puisqu'on vient de prouver qu'ils étaient angles internes de triangles équilatéraux. Notre dernier triangle MNP est donc lui aussi équilatéral.
16. Les trois petits triangles ont pour côté $2b - a$. Le triangle MNP a pour côté $MP = KL - KM - PL = b - 2(2b - a) = 2a - 3b$.
17. L'aire du triangle ABC est égale à trois fois celle du triangle AGH (question 13), mais aussi égale à la somme des aires des triangles AGH , CKL , IBJ et MNP , diminuée de celles des triangles KMH , PJL et GIN . Comme les triangles IJB et KLC ont la même aire que AGH , et que KMH , PLJ et GIN ont une aire identique, on obtient en comparant les deux formules que l'aire de MNP moins trois fois l'aire de KMH doit être nulle, soit exactement le résultat demandé.

18. Si l'aire de MNP est triple de celle de KMH , vu les longueurs respectives des côtés calculées en question 16, on a $(2a - 3b)^2 = 3(2b - a)^2$, donc $\frac{2a - 3b}{2b - a} = \sqrt{3} = \frac{a}{b}$. Comme dans la partie où on a démontré l'irrationnalité de $\sqrt{2}$ par une méthode similaire, on obtient une nouvelle fraction égale à $\sqrt{3}$ dont numérateur et dénominateur sont inférieurs à la fraction initiale, ce qui est absurde si on suppose la fraction initiale irréductible. Le nombre $\sqrt{3}$ est donc lui aussi irrationnel.

B. Théorème de Lucas

19. Puisque le triangle ABC est équilatéral, on doit avoir $AB = AC$, donc $|z_C - z_A| = |z_B - z_A|$, ou encore $\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1$ (les points sont distincts, le dénominateur ne peut pas être nul). De plus, $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$, et il s'agit ici d'une mesure d'angle orienté et non d'angle géométrique puisque le triangle est supposé direct. On a donc $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. On connaît donc le module et l'argument de ce quotient, qui doit être égal à $e^{i\frac{\pi}{3}}$.
20. Si l'égalité précédente était vérifiée, on aurait $2(z_C - z_A) = (1 + i\sqrt{3})(z_B - z_A)$. Les parties réelle et imaginaire de z_A , z_B et z_C étant par hypothèses toutes des nombres rationnels, en isolant les parties imaginaires à gauche et à droite de cette égalité, on aurait une relation du type $q_1 = \sqrt{3}q_2$, avec q_1 et q_2 rationnels. Le nombre $\sqrt{3}$ serait donc lui-même rationnel, ce qui est absurde et démontre l'impossibilité de construire un triangle équilatéral dont les sommets sont tous à coordonnées rationnelles.

III. Irrationalité de e par la méthode de Sondow

21. (a) Simplement en utilisant le fait que $\exp' = \exp$, la fonction φ est dérivable sur \mathbb{R} , et $\varphi'(x) = \exp(x)\exp(-x) + \exp(x) \times (-\exp(-x)) = 0$. La fonction est donc constante, égale à $\varphi(0) = (\exp(0))^2 = 1$. On en déduit que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x)\exp(-x) = 1$. En particulier, le nombre $\exp(x)$ est toujours inversible, donc ne peut jamais être nul.
- (b) La fonction étant continue sur \mathbb{R} et ne s'annulant jamais, elle est de signe constant (si elle prenait à la fois une valeur strictement positive et une valeur strictement négative, le théorème des valeurs intermédiaires assurerait qu'elle s'annule entre les deux). Comme $f(0) = 1 > 0$, f est donc strictement positive sur \mathbb{R} . Étant égale à sa propre dérivée, elle a donc aussi une dérivée strictement positive, donc est strictement croissante sur \mathbb{R} .
22. (a) La fonction \exp étant croissante sur \mathbb{R} , on peut écrire que, $\forall t \in [0, 1]$, $\exp(0) = 1 \leq \exp(t) \leq \exp(1) = e$, puis, en multipliant tout par une quantité positive sur cet intervalle, $\frac{(1-t)^n}{n!} \leq \frac{(1-t)^n}{n!} \exp(t) \leq \frac{e(1-t)^n}{n!}$. Tant qu'à faire, remplaçons le minorant qui est positif par 0, ce sera suffisant pour obtenir l'encadrement demandé. On peut intégrer notre encadrement entre 0 et 1 pour en déduire $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n!} \int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{e}{n!} \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{e}{n!} \times \frac{1}{n+1} = \frac{e}{(n+1)!}$.
- (b) On part de I_{n+1} et on effectue une IPP en posant $u(t) = \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}$, donc $u'(t) = -\frac{(1-t)^n}{n!}$ et $v'(t) = \exp(t)$ dont une primitive est simplement donnée par $v(t) = \exp(t)$ puisque \exp est sa propre dérivée. On obtient alors
$$I_{n+1} = \left[\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} \exp(t) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \exp(t) dt = I_n - \frac{1}{(n+1)!}.$$

- (c) D'après la question précédente, $S_{n+1} + I_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + I_n - \frac{1}{(n+1)!} = S_n + I_n$, donc la suite $(S_n + I_n)$ est constante. Comme $S_0 = \frac{1}{0!} = 1$ et $I_0 = \int_0^1 \exp(t) dt = [\exp(t)]_0^1 = e - 1$, on a $S_0 + I_0 = e$, ce qui prouve bien que notre suite constante est égale à e .
- (d) L'encadrement obtenu à la question *a* prouve que $\lim I_n = 0$ (théorème des gendarmes), donc $S_n = e - I_n$ converge trivialement vers e .
23. (a) Une récurrence classique déjà croisée dans une de mes feuilles d'exercices. On initialise pour $k = 4$: $4! = 24$ et $2^4 = 16$, l'inégalité $24 > 16$ est bien vérifiée. Supposons désormais que $k! > 2^k$ pour un certain entier $k \geq 4$, alors $(k+1)! = (k+1) \times k! > (k+1) \times 2^k \geq 4 \times 2^k > 2^{k+1}$, ce qui prouve l'hérédité de notre récurrence.
- (b) Plutôt que de s'embêter à refaire des calculs pénibles, reprenons la relation de récurrence de la question 22.b et la valeur de I_0 calculée un peu plus haut : $I_0 = e - 1$, donc $I_1 = I_0 - 1 = e - 2$ puis $I_2 = I_1 - \frac{1}{2!} = e - \frac{5}{2}$.
- (c) Puisque $I_2 < \frac{e}{3!}$, on doit avoir $e - \frac{5}{2} < \frac{e}{6}$, donc $\frac{5}{6}e < \frac{5}{2}$, soit $e < 3$.
- (d) On a $I_n < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{1}{n!}$ dès que $\frac{e}{n+1} < 1$, ce qui sera vrai dès que $n \geq 2$ d'après la question précédente. Reste à vérifier que l'inégalité proposée fonctionne pour $n = 1$. Or, $I_1 = e - 2 < 1 = \frac{1}{1!}$ puisque $e < 3$.
- (e) L'inégalité demandée est équivalente à $2^k > 1\,000$, ce qui est le cas à partir de $k = 10$ (puisque, comme chacun sait, $2^{10} = 1\,024$).
- (f) D'après les questions précédentes, pour $n \geq 10$, $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^n} < 10^{-3}$, donc $0 < I_n < 10^{-3}$. Or, $e - S_n = I_n$, ce qui prouve que, pour ces mêmes valeurs de n , $|e - S_n| \leq 10^{-3}$. Le nombre S_{10} (qui est rationnel de façon évidente comme somme de rationnels) est donc une valeur approchée à 10^{-3} près de e . Pour obtenir la valeur décimale, euh, il faut vraiment calculer $S_{10} = \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k!}$? Apparemment oui, ça doit être pour justifier le fait complètement aberrant que les calculatrices sont autorisées pour les écrits de CAPES de maths. Mais si on est vraiment très très courageux, ça se fait à la main :
$$S_{10} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5\,040} + \frac{1}{40\,320} + \frac{1}{362\,880} + \frac{1}{3\,628\,800} = \frac{3\,628\,800 + 3\,628\,800 + 1\,814\,400 + 604\,800 + 151\,200 + 30\,240 + 5\,040 + 720 + 90 + 10 + 1}{3\,628\,800}$$

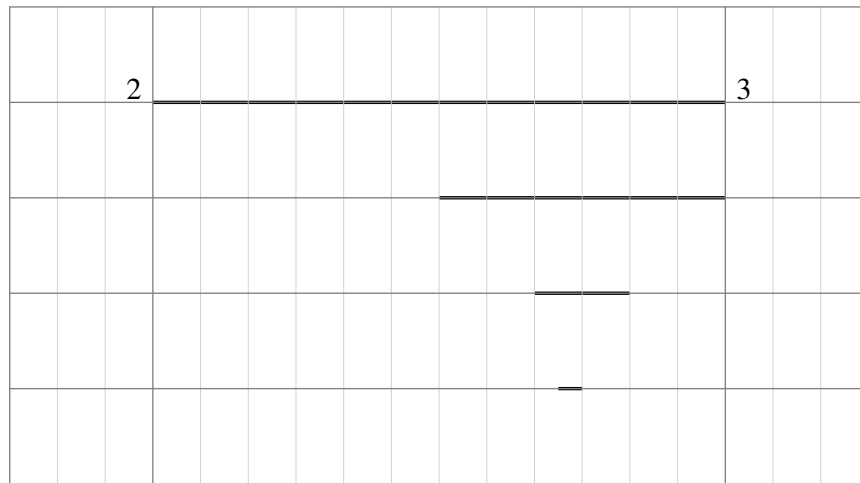
$$= \frac{9\,864\,101}{3\,628\,800}$$
. Une petite division euclidienne à la main plus tard, on trouve $e \simeq 2.718$ (notons qu'en pratique, le calcul de S_6 aurait en fait suffi à obtenir la même approximation à trois décimales).
- (g) On va supposer que la suggestion de l'énoncé consistant à utiliser une fonction pour calculer les factorielles était une plaisanterie d'un goût douteux, puisque ça reviendrait à refaire à chaque étape un nouveau calcul de factorielle, ce qui est désastreux d'un point de vue complexité quand on peut obtenir $\frac{1}{(n+1)!}$ à partir de $\frac{1}{n!}$ à l'aide d'une très bête multiplication par $\frac{1}{n+1}$. Le plus simple est donc de créer une variable calculant la somme S_n , une autre stockant la valeur de $\frac{1}{n!}$, et de s'arrêter dès que $\frac{1}{n!} < 10^{-m}$. Le programme suivant fait exactement cela (et renvoie, en plus de la valeur approchée souhaitée, la valeur de n pour laquelle on a obtenu cette approximation) :

```

def approximation(m) :
    S,a,b,n=1,1,10**(-m),0
    while a>b :
        n+=1
        a*=1/n
        S+=a
    return S,n

```

24. (a) Cette question mérite sûrement au moins une mention honorable dans la catégorie « question la plus grotesque posée dans l'histoire des épreuves de CAPES ». Mais bon, comme je suis sérieux (si, si, ça m'arrive parfois), voici ci-dessus la représentation demandée, en essayant même de faire un effort pour proposer un schéma ressemblant de loin à ce qu'on pourrait obtenir sur les lignes d'une vraie copie (le choix de l'unité de 12 cm étant bien sûr adapté à des divisions par 2, puis 6 puis 24) :



- (b) Là, quand même, on ne sait plus quoi donner comme justification : $S_2 = 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ et $S_2 + \frac{1}{2} = \frac{6}{2}$, donc $J_2 = \left] \frac{5}{2}, \frac{6}{2} \right[$, puis $S_3 = S_2 + \frac{1}{3!} = \frac{15}{6} + \frac{1}{6} = \frac{16}{6}$, et $S_3 + \frac{1}{6} = \frac{17}{6}$, ce qui prouve que $J_3 = \left] \frac{16}{6}, \frac{17}{6} \right[$. De même, $S_4 = S_3 + \frac{1}{24} = \frac{64}{24} + \frac{1}{24} = \frac{65}{24}$ et $S_4 + \frac{1}{24} = \frac{66}{24}$, donc $J_4 = \left] \frac{65}{24}, \frac{66}{24} \right[$. On se demande surtout quel peut bien être l'intérêt de poser une question aussi débile dans la mesure où elle ne sert même pas pour la suite.
- (c) Clairement, $S_{n+1} \geq S_n$ puisque $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$. De plus, $S_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - S_n - \frac{1}{n!} = -\frac{1}{n!} < 0$, donc $S_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} < S_n + \frac{1}{n!}$. Ces deux inégalités prouvent bien que $J_{n+1} \subset J_n$ (c'est même une inclusion stricte des deux côtés).
- (d) Comme $e = S_n + I_n$, avec $0 < I_n < \frac{1}{n!}$ pour $n \geq 1$ (cf question 23), $S_n < e < S_n + \frac{1}{n!}$, ce qui prouve bien que $e \in J_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et donc que e appartient à l'intersection de tous ces intervalles.
- (e) L'intervalle J_n est de la forme $\left] \frac{p}{n!}, \frac{p+1}{n!} \right[$ pour un certain entier naturel p (c'est trivial, il suffit de mettre tous les termes de la somme définissant S_n au même dénominateur pour obtenir un dénominateur égal à $n!$, toutes les factorielles d'entiers inférieurs à n divisant évidemment $n!$). Il ne peut donc contenir aucun nombre de la forme $\frac{k}{n!}$: si $k \leq p$, notre nombre sera « strictement à gauche » de J_n , et si $k \geq p+1$, il sera « strictement à droite ».

- (f) Si e est rationnel, on peut l'écrire $e = \frac{p}{q} = \frac{p(q-1)!}{q!}$ pour un certain entier $q \geq 1$. Or, un tel nombre ne peut pas appartenir à l'intervalle J_q d'après la question précédente, alors que e appartient à ce même intervalle. Cette contradiction flagrante prouve l'irrationalité de e et conclut enfin cette partie d'énoncé particulièrement poussive (19 sous-questions avec aussi peu de contenu, quelque part, c'est un exploit!).

IV. Polygones à angles rationnels

A. Un premier exemple

25. (a) Tiens, une question de cours! On suppose que le but était de démontrer cette formule à l'aide de celle de d'addition des sinus et des formules de duplication, comme nous l'avions fait en cours : $\sin(3x) = \sin(2x+x) = \sin(2x)\cos(x) + \sin(x)\cos(2x) = 2\sin(x)\cos^2(x) + \sin(x)(1-2\sin^2(x)) = 2\sin(x)(1-\sin^2(x)) + \sin(x) - 2\sin^3(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$.
- (b) Si on applique la formule précédente à $x = \frac{\pi}{18}$, en notant $\alpha = \sin(x)$ et en constatant que $\sin(3x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, on obtient $\frac{1}{2} = 3\alpha - 4\alpha^3$, donc $8\alpha^3 - 6\alpha + 1 = 0$.
26. (a) La fonction f est dérivable et $f'(x) = 24x^2 - 6 = 6(4x^2 - 1)$. Cette dérivée s'annule lorsque $x^2 = \frac{1}{4}$, donc en $\pm\frac{1}{2}$. Elle est positive en-dehors de ces racines. Les limites de f sont triviales, calculons plutôt $f\left(\frac{1}{2}\right) = 8 \times \frac{1}{8} - 6 \times 12 + 1 = -1$, et $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 + 3 + 1 = 3$. On en déduit le superbe tableau suivant :

| | | | | |
|-----|-----------|----------------|---------------|-----------|
| x | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
| f | $-\infty$ | 3 | -1 | $+\infty$ |

- (b) La fonction f est bijective sur chacun des intervalles $\left] -\infty, -\frac{1}{2} \right]$, $\left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$ et $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right]$, vers un intervalle contenant toujours la valeur 0, ce qui prouve l'existence des trois solutions de l'équation $f(x) = 0$. Pour obtenir les encadrement demandés, on calcule $f(-1) = -8 + 6 + 1 = -1 < 0$, ce qui prouve que $f(-1) < 0 < f\left(-\frac{1}{2}\right)$ et donc que $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$ (la fonction f étant croissante sur notre premier intervalle). De même, la croissance de f à droite de $\frac{1}{2}$ et le fait que $f(1) = 8 - 6 + 1 = 3 > 0$ assurent que $\gamma < 1$. Enfin, $f\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{8}{512} - \frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{64} > 0$ et $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{8}{64} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} < 0$. Cette fois-ci, la décroissance de f sur l'intervalle $\left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$ permet d'en déduire que $\frac{1}{8} < \beta < \frac{1}{4}$.
27. (a) D'après l'unicité de la décomposition en facteurs premiers, les facteurs premiers de b^k sont les mêmes que ceux de b (seules les puissances correspondantes vont augmenter). Si a et b sont premiers entre eux, ils n'ont aucun facteur premier en commun, donc a et b^k non plus.
- (b) Oui : $8\frac{s^3}{t^3} - 6\frac{s}{t} + 1 = 0$, donc $8s^3 - 6st^2 + t^3 = 0$.
- (c) Par hypothèse, s et t sont premiers entre eux, donc toute puissance de s est première avec toute puissance de t . Or, $6st^2 - t^3 = 8s^3$, donc $t^2(6s - t) = 8s^3$. En particulier, t^2 divise $8s^3$, et comme il est premier avec s^3 , divise en fait 8 (théorème de Gauss). Cela suffit à assurer que t divise 2, donc prend une des quatre valeurs proposées dans l'énoncé.

- (d) Si t est un diviseur de 2, cela signifie que r est soit un entier soit un demi-entier (multiple entier de $\frac{1}{2}$), ce qui est impossible pour chacune des trois racines de P d'après les encadrements de la question 26.b. Le polynôme P ne peut donc pas avoir de racine rationnelle.
28. S'il existait un tel triangle, son sinus serait calculable comme quotient des longueurs de deux des côtés du triangle, donc serait un nombre rationnel. Or, on vient de prouver que ce sinus, qui est racine de P , ne peut pas être un nombre rationnel. Un tel triangle ne peut donc pas exister.

B. Théorème de Niven

29. (a) Puisque $\frac{s}{t}$ est racine de P , en isolant le terme dominant, on a $\frac{s^d}{t^d} + \sum_{k=0}^{d-1} c_k \frac{s^k}{t^k} = 0$. Il suffit de tout multiplier par t^d pour obtenir $s^d + \sum_{k=0}^{d-1} c_k s^k t^{d-k}$, ce qui donne exactement l'égalité souhaitée en sortant un facteur t de la somme.
- (b) Puisque s et t sont supposés premiers entre eux, t est également premier avec s^d . Or, l'égalité précédente prouve que t est un diviseur de s^d , ce qui impose donc $t = \pm 1$, et $r \in \mathbb{Z}$.
30. (a) Calculons : $P_2(X) = XP_1(X) - P_0(X) = X^2 - 2$, puis $P_3(X) = XP_2(X) - P_1(X) = X^3 - 2X - X = X^3 - 3X$, et enfin $P_4(X) = XP_3(X) - P_2(X) = X^4 - 3X^2 - X^2 + 2 = X^4 - 4X^2 + 2$.
- (b) C'est une récurrence double complètement triviale. Le résultat est clairement vrai pour P_0 et P_1 . Si on le suppose pour P_n et P_{n+1} , alors XP_{n+1} est unitaire de degré $n+2$ à coefficients entiers, et $-P_n$ de degré n à coefficients entiers, ce qui implique que P_{n+2} est exactement de degré $n+2$ et unitaire (pas de compensation possible au niveau du terme de plus haut degré) et tous ses coefficients sont des différences d'entiers, donc entiers.
- (c) On va également procéder par récurrence double : $P_0(2 \cos(x)) = 2 = 2 \cos(0) = 2 \cos(0x)$, et $P_1(2 \cos(x)) = 2 \cos(x)$ par définition du polynôme P_1 . Supposons désormais les égalités $P_n(2 \cos(x)) = 2 \cos(nx)$ et $P_{n+1}(2 \cos(x)) = 2 \cos((n+1)x)$ vérifiées, alors $P_{n+2}(2 \cos(x)) = 2 \cos(x)P_{n+1}(2 \cos(x)) - P_n(2 \cos(x)) = 4 \cos(x) \cos((n+1)x) - 2 \cos(nx)$. Or, par formule de transformation somme-produit, $2 \cos(x) \cos((n+1)x) = \cos((n+2)x) + \cos(nx)$, donc $P_{n+2}(2 \cos(x)) = 2 \cos((n+2)x)$, soit exactement ce qu'on voulait prouver pour achever la récurrence double.
31. (a) Le polynôme P_t est à coefficients entiers, et d'après la question précédente, $P_t(2 \cos(r\pi)) = 2 \cos(tr\pi) = 2 \cos(s\pi)$. Cette dernière valeur est égale à 0, 2 ou -2 selon la valeur (et notamment la parité) de s . Si cette valeur est nulle, il suffit de prendre $Q = P_t$, sinon on choisit $Q = P_t + 2$ ou $Q = P_t - 2$ selon la valeur obtenue, et bien sûr on conservera un polynôme à coefficients entiers, qui s'annule en $2 \cos(r\pi)$.
- (b) La question 29.b et le résultat précédent prouvent que $2 \cos(r\pi)$ est un nombre entier, donc que $\cos(r\pi)$ est un demi-entier si r est un nombre rationnel. Comme par ailleurs un cosinus est toujours compris entre -1 et 1 , les seules valeurs possibles pour $\cos(r\pi)$ sont donc les cinq valeurs données par l'énoncé du théorème de Niven. Notons en passant qu'on peut donc très facilement donner la liste de tous les angles rationnels ayant un cosinus rationnel, ce sont simplement tous les multiples entiers de $\frac{\pi}{3}$ et de $\frac{\pi}{2}$.

C. Applications du théorème de Niven : triangles à côtés et angles rationnels

32. C'est une conséquence triviale de la formule d'Al-Kashi, dont on va quand même supposer qu'elle est au programme du CAPES. En effet, en notant a , b et c les trois côtés supposés rationnels du triangle, on a par exemple $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})$, donc $\cos(\hat{A}) = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}$,

clairement rationnel. Les formules pour les autres cosinus sont identiques à permutation des variables près.

33. D'après le théorème de Niven, les seuls angles possibles pour notre triangle sont $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{2\pi}{3}$ (pas d'angle plat autorisé). Pour avoir une somme des angles égale à π , la seule possibilité est d'avoir trois angles égaux à $\frac{\pi}{3}$, donc un triangle équilatéral.