

Feuilles d'exercices n° 3 : Fonctions usuelles

MPSI Lycée Camille Jullian

19 septembre 2024

Exercice 1 (*)

Déterminer le domaine de définition des fonctions définies par les équations suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x - 2}$

2. $f(x) = e^x \ln(x + 5)$

3. $f(x) = \frac{\sqrt{x(x-1)}}{x^2 - 4}$

4. $f(x) = \ln(x^5 + 1)$

Exercice 2 (* à **)

Déterminer la parité des fonctions définies par les équations suivantes :

1. $f(x) = 2x^6 - 5x^4 + x^2 + 6$

2. $f(x) = \ln|x|$

3. $f(x) = \frac{1}{(x^3 - 2x)^2} \times \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + 2}}$

4. $f(x) = |2x^2 - e^{x^4} + \ln(x^2 - 1)|$

5. $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Exercice 3 (** à ***)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations, inéquations et systèmes suivants :

1. $x^4 + x^2 - 20 = 0$

2. $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$

3. $\ln(x+2) - \ln(2x-6) \leq \ln 2$

4. $\frac{-x^3 - 2x^2 - 5}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} \geq -1$

5. $x - 1 \leq \sqrt{x+2}$

6. $\ln(x+3) + \ln(x-1) = 2\ln 2$

7. $3 \times 2^{3x-4} \geq 2^4$

8. $\ln(2x-3) \leq \ln 5$

9. $5^x - 5^{x+1} + 2^{3x-1} = 0$

10. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

11. $x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{5}{3}} - 3 = 0$

12. $e^{-6x} + 3e^{-4x} - e^{-2x} - 3 = 0$

13. $8^{6x} - 3 \times 8^{3x} \leq 4$

14. $\begin{cases} x + y = 520 \\ \log x + \log y = 4 \end{cases}$
15. $4 \operatorname{ch}(x) + 3 \operatorname{sh}(x) - 4 = 0$
16. $\ln(|x+1|) - \ln(|2x+1|) \leq \ln(2)$
17. $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$ (on pourra poser $X = x + \frac{1}{x}$)
18. $\log_2(x) + \log_4(x) + \log_8(x) = \frac{11}{2}$
19. $\begin{cases} \operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}(y) = 4 \\ \operatorname{sh}(x) + \operatorname{sh}(y) = 1 \end{cases}$

Exercice 4 (**)

Déterminer **sans calculer leur dérivée** les variations des fonctions définies par les équations suivantes :

1. $f(x) = \frac{-5}{2e^{-2x+3}}$
2. $f(x) = (e^x + 2)^2 - 3$
3. $f(x) = (e^x - 3)^2 + 2$
4. $f(x) = \ln(e^{-x} - 1)$
5. $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

Exercice 5 (* à ***)

Étudier les variations et tracer la courbe représentative des fonctions définies par les équations suivantes :

1. $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$
2. $f(x) = x^x$
3. $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$
4. $f(x) = e^{x^2-x-1}$
5. $f(x) = \ln\left(\frac{x^2-4x}{x^2-4x+3}\right)$
6. $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2-1}$
7. $f(x) = x^{x^2}$
8. $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{2a-x}}$, a étant une constante positive fixée.
9. $f(x) = x^{-\ln(x)}$

Exercice 6 (**)

On définit une fonction f par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

1. Étudier complètement la fonction f , et tracer une allure de sa courbe représentative.
2. Déterminer tous les couples d'entiers (a, b) tels que $2 \leq a < b$ et $a^b = b^a$.
3. Entre e^π et π^e , quel est le nombre le plus grand ?

Exercice 7 (*)

Soit f une fonction vérifiant, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = \frac{f(x)-5}{f(x)-3}$. Montrer que la fonction f est forcément 4-périodique.

Exercice 8 (*)

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$.

Exercice 9 (**)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

1. Donner la représentation graphique de la fonction f .
2. On pose $g(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > y\}$. Vérifier que g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et donner sa représentation graphique.
3. Tracer les courbes représentatives des fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 10 (**)

1. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{th}(x) = \frac{2}{\text{th}(2x)} - \frac{1}{\text{th}(x)}$.
2. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \text{th}(2^k x)$.

Exercice 11 (*)

Pour tout réel strictement positif m , on définit la fonction f_m par $f_m(x) = \ln(e^x + me^{-x})$. On notera $\mathcal{C}_m$ la courbe représentative de la fonction f_m .

1. Quel est le domaine de définition des fonctions f_m ?
2. Étudier les variations de la fonction f_n , puis montrer que $\mathcal{C}_m$ admet deux asymptotes, dont l'une est commune à toutes les courbes de la famille.
3. Quelle transformation simple faut-il effectuer à partir de la courbe $\mathcal{C}_1$ pour obtenir la courbe $\mathcal{C}_m$?

Exercice 12 (**)

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation (E) : $x^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$.

1. On pose $f(x) = \sqrt{x} \ln(x) + \ln(2)$. Donner le domaine de définition de f , et préciser ses limites aux bornes de ce domaine.
2. Étudier les variations de la fonction f , et dresser un tableau de variations complet de la fonction.
3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ (on rappelle que $\ln(2) \simeq 0.69$, et $\frac{1}{e} \simeq 0.36$).
4. On va chercher les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sous la forme $x = \frac{1}{n^2}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Montrer que $f\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0 \Leftrightarrow n^2 = 2^n$.
 - (b) En déduire que n doit être pair puis, en posant $n = 2p$, que $2^{p-1} = p$.
 - (c) Trouver deux solutions évidentes à cette dernière équation, et en déduire les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
5. Conclure en donnant les solutions de l'équation (E).

Exercice 13 (**)

Dans tout cet exercice, on cherche à étudier la fonction f définie par l'équation $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Étudier la parité de f .
3. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$, et dresser le tableau de variations de la fonction f .
5. Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse $\ln 2$.
6. Démontrer que $\forall x \in [0, +\infty[, -\frac{1}{3} \leq f'(x) \leq 0$.
7. Montrer à l'aide de la question précédente que $\forall x \in [0, +\infty[, -\frac{1}{3}x + \frac{1}{4} \leq f(x)$.
8. Tracer dans un même repère la droite d'équation $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$, et la courbe représentative de la fonction f .

Exercice 14 (**)

On pose pour cet exercice $f(x) = x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x)$. On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f .

1. Donner le domaine de définition de la fonction f . Calculer ses limites aux bornes de ce domaine.
2. On constate aisément que $\forall x \in \mathcal{D}_f$, on a $f(1-x) = f(x)$. Cette égalité traduit une symétrie de $\mathcal{C}_f$ par rapport à une droite, laquelle?
3. Étudier les variations de la fonction f , puis dresser son tableau de variations complet.
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x)$. Que peut-on en déduire sur $\mathcal{C}_f$?
5. Tracer une allure de $\mathcal{C}_f$ tenant compte de tous les calculs effectués jusqu'ici.
6. Déduire des questions précédentes la valeur minimale prise par l'expression $x^x \times (1-x)^{1-x}$ lorsque $x \in]0, 1[$.

Exercice 15 (**)

On cherche dans cet exercice à étudier la fonction f définie par $f(x) = x + 2 \ln(\text{ch}(x))$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f .
2. Calculer les valeurs exactes de $f(0)$, $f(\ln(2))$ et $f(-\ln(3))$.
3. Calculer la dérivée f' de la fonction f , puis dresser le tableau de variations de f (sans limites pour l'instant).
4. En factorisant $\text{ch}(x)$ par e^x ; prouver que la droite d'équation $y = 3x - 2 \ln(2)$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$. Préciser la position relative de la courbe et de cette asymptote.
5. Effectuer un calcul similaire en $-\infty$, avec une factorisation légèrement différente du ch .
6. Tracer une allure de la courbe représentative de f , ainsi que de ses deux asymptotes obliques.

Exercice 16 (***)

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = x(\ln(x))^n$ (les fonctions f_n sont donc définies sur $\mathbb{R}^{+*}$), et on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n .

1. Quelles sont les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition ?
2. Effectuer l'étude des variations des fonctions f_1 et f_2 (on dressera un tableau de variations complet à chaque fois).
3. Résoudre l'équation $f_1(x) = f_2(x)$ et en déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Vérifier plus généralement qu'il existe deux points du plan qui sont communs à toutes les courbes $\mathcal{C}_n$.
4. Étudier plus généralement les positions relatives de $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
5. Que peut-on dire des positions de toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ sur l'intervalle $]0, 1[$ (soyez le plus précis possible) ?
6. Tracer dans un même repère une allure soignée des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
7. Généraliser les résultats de la question 2 en étudiant les variations de f_n pour tout entier $n \geq 1$ (on pourra distinguer deux cas suivant la parité de n).

Exercice 17 (**)

On définit la fonction f par l'équation $f(x) = x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$.

1. Préciser le domaine de définition de f .
2. On va commencer l'étude de f par celle de ses limites et asymptotes.
 - (a) Déterminer rigoureusement la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.
 - (b) Étudier le signe de $x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right)$, et en déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - (c) En posant $x = \frac{2}{u}$, montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right) = 2$. En déduire la présence d'une asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$, dont on précisera l'équation.
3. On va maintenant passer à l'étude des variations.
 - (a) Calculer la dérivée f' de la fonction f .
 - (b) On pose $g(x) = \ln(x+2) - \ln(x) - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$. Effectuer une étude complète de la fonction g (la courbe n'est pas demandée).
 - (c) Déduire de la question précédente que, $\forall x > 0$, $g(x) > 0$, en déduire le tableau de variations de la fonction f .
4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f en son point d'abscisse 1 (on donnera si besoin des valeurs approchées de son coefficient directeur et de son ordonnée à l'origine).
5. Tracer la courbe représentative de f ainsi que la tangente calculée à la question précédente dans un même repère.

Exercice 18 (**)

Démontrer les formules d'addition suivantes pour les fonctions hyperboliques (valables pour tout réel x) :

1. $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(y)$
2. $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}(x) \operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x) \operatorname{sh}(y)$
3. $\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th}(x) + \operatorname{th}(y)}{1 + \operatorname{th}(x) \operatorname{th}(y)}$

Exercice 19 (**).

On cherche dans cet exercice à étudier la réciproque de la fonction sinus hyperbolique, étude qui n'est plus au programme de MPSI. La fonction réciproque porte le nom d'**argument sinus hyperbolique** et est habituellement notée Argsh .

1. Donner le tableau de variations de la fonction Argsh ainsi qu'une allure de sa courbe (on rappellera l'allure de la courbe de sh dans le même repère).
2. Résoudre l'équation $\text{sh}(x) = 1$.
3. Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $\text{sh}(x) = y$ (on exprimera l'unique solution de cette équation en fonction de y , en utilisant une méthode très similaire à celle de la question précédente).
4. En déduire une expression explicite de la fonction Argsh .
5. À l'aide de l'expression précédente, calculer la dérivée Argsh' de la fonction Argsh .
6. Vérifier que cette dérivée est cohérente avec la formule de dérivée de la réciproque vue en cours (on aura sûrement besoin à un moment ou à un autre de la formule classique $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$, valable pour tout réel x).
7. Si on souhaite définir une réciproque de la fonction ch (qui sera logiquement notée Argch), à quel intervalle faut-il restreindre cette dernière? Donner une formule pour la fonction Argch en utilisant la même technique que ci-dessus.
8. Déterminer une formule simple pour la réciproque Argth de la fonction th , et calculer sa dérivée. En déduire la valeur exacte de $\int_2^3 \frac{1}{1-t^2} dt$.

Exercice 20 (**)

On note dans tout cet exercice E l'ensemble de toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et F le sous-ensemble de E constitué des applications bijectives. Dans tout l'exercice on considèrera qu'une application est nécessairement définie sur $\mathbb{R}$ tout entier (pas de valeur interdite). On définit enfin une relation binaire $\sim$ sur l'ensemble E de la façon suivante : $f \sim g$ si et seulement si $\exists h \in F, g = h^{-1} \circ f \circ h$.

1. Montrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble E .
2. Quelle est la classe d'équivalence de la fonction f constante égale à 0 pour cette relation?
3. Quelle est la classe d'équivalence de l'application id pour cette relation?
4. On suppose que f est une application injective. Montrer que, si $f \sim g$, alors g est aussi injective.
5. On suppose que f est une application surjective. Montrer que, si $f \sim g$, alors g est aussi surjective.
6. Deux applications bijectives appartiennent-elles nécessairement à la même classe d'équivalence?
7. Montrer que, si $f \in F$ et $f \sim g$, alors $g \in F$, et $f^{-1} \sim g^{-1}$.
8. En notant $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$, montrer que $f \sim g \Rightarrow f^n \sim g^n$.
9. Montrer que la fonction $h : x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ est réciproque de la fonction sh .
10. À l'aide de la question précédente, montrer que les fonctions f et g définies par $f(x) = 2x$ et $g(x) = 2x\sqrt{1+x^2}$ appartiennent à la même classe d'équivalence pour la relation $\sim$.

Problème 1 (**)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$, et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

I. Étude de f et de sa réciproque.

1. Étudier les variations et limites de la fonction f .
2. (a) Déterminer la dérivée seconde f'' de la fonction f et vérifier qu'elle s'annule en une unique valeur α .

- (b) Donner l'équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse α . En quel point (T) coupe-t-elle l'axe des abscisses ?
- (c) Étudier la position relative de (T) et de $\mathcal{C}_f$ (on pourra dériver deux fois la différence des deux équations si besoin).
3. Tracer dans un même repère (T) et $\mathcal{C}_f$.
4. Montrer que la fonction f est bijective de $[-1; +\infty[$ vers un intervalle à préciser. On note g la réciproque de la fonction f sur cet intervalle. Donner le tableau de variations complet de la fonction g .
5. Exprimer la dérivée g' de la fonction g en fonction de x et de $g(x)$, sans utiliser d'exponentielle. En déduire une équation différentielle vérifiée par la fonction g .
6. Montrer que l'équation $2^x = x$ admet pour solution $x = -\frac{g(-\ln(2))}{\ln(2)}$ (qu'on ne cherchera bien sûr pas à expliciter plus).
7. Exprimer de même une solution de l'équation $x^x = 3$ en faisant intervenir la valeur $g(\ln(3))$.

II. Des fonctions auxiliaires.

On considère désormais, pour tout réel $a > 0$, la fonction h_a définie sur $\mathbb{R}$ par $h_a(x) = e^{-x} + ax^2$.

1. Établir le tableau de variations de la fonction h_a (en exploitant les résultats de la première partie). On montrera en particulier que h_a admet un minimum en un point m_a que l'on exprimera en fonction de a et à l'aide de la fonction g . Montrer que $h_a(m_a) = am_a(m_a + 2)$.
2. On note enfin i la fonction $i : a \mapsto m_a$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. Étudier les variations de la fonction i ainsi que ses limites.
3. Montrer que la valeur du maximum de h_a est une fonction croissante du paramètre a , et déterminer sa limite lorsque a tend vers $+\infty$.

Problème 2 : Un peu de géométrie ! (**)

Le but de ce problème est de déterminer la forme des triangles ayant une aire maximale à périmètre fixé.

I. Une inégalité classique.

1. Démontrer à l'aide d'une étude de fonction que, $\forall a \in [0, 1]$, $a(1-a)^2 \leq \frac{4}{27}$.
2. On fixe désormais une valeur de $a \in [0, 1]$, et on pose $f_a(x) = -ax^2 + a(1-a)x$.
 - (a) Déterminer le maximum de la fonction f_a sur l'intervalle $[0, 1-a]$.
 - (b) En déduire la propriété suivante : si a, b et c sont trois réels positifs tels que $a+b+c=1$, alors $abc \leq \frac{1}{27}$.
 - (c) Dans quels cas l'inégalité démontrée à la question précédente est-elle une égalité ?
3. En utilisant la propriété démontrée à la question 2.b, prouver que, quels que soient les réels positifs x, y et z , on a $xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$.
4. Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si $x = y = z$.

II. Applications aux triangles.

Soit $p > 0$. On considère un triangle de côtés a , b et c tels que $a + b + c = 2p$ (autrement dit, p est le demi-périmètre du triangle), et on admet que l'aire $\mathcal{A}$ de ce triangle peut être obtenue par la formule de Héron : $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

1. On note $x = p - a$, $y = p - b$ et $z = p - c$, justifier que ces trois nombres sont positifs.
2. En appliquant les résultats de la première partie, déterminer la valeur maximale de $\mathcal{A}$ (en fonction de p).
3. À quoi ressemble le triangle dans le cas où l'aire est maximale ?

Problème 3 (**)

Pour tout entier naturel n , on définit sur $]0, +\infty[$ la fonction f_n par $f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln(x)$. On notera $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n .

A. Étude de la fonction f_0 .

1. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} + x - 1 \geq 0$, et en déduire que $1 + (x - 1)e^x \geq 0$.
2. Déterminer les limites de la fonction f_0 aux bornes de son domaine de définition.
3. Étudier les variations de la fonction f_0 .
4. Tracer une allure de la courbe $\mathcal{C}_0$.

B. Étude de la famille de fonctions (f_n) .

1. Déterminer le sens de variation des fonctions f_n .
2. Déterminer les limites des fonctions f_n aux bornes de leur ensemble de définition.
3. Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$. On précisera en particulier les coordonnées d'un point commun à toutes les courbes $\mathcal{C}_n$.
4. Montrer que la fonction f_1 s'annule en un unique réel qu'on notera α_1 .
5. Montrer que $f_n(\alpha_1) < 0$ pour tout entier $n > 1$, puis que la fonction f_n s'annule en un unique réel α_n vérifiant $\alpha_1 \leq \alpha_n \leq 1$.
6. Montrer que, $\forall x \in]0, 1]$, $\frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$. En déduire que $\ln(\alpha_n) \geq \frac{1 - e}{n}$.
7. Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de la suite (α_n) .
8. Tracer dans un même repère une allure des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

C. Un peu de calcul d'intégrales.

On note désormais $I_n = \int_1^{\frac{3}{2}} f_n(t) dt$.

1. Quelle est la monotonie de la suite (I_n) ?
2. La suite (I_n) est en fait une suite d'un type bien connu. Préciser lequel.