

Feuilles d'exercices n° 6 : Techniques de calcul algébrique.

MPSI Lycée Camille Jullian

5 novembre 2024

Exercice 1 (***)

Montrer par récurrence les propriétés suivantes :

1. $\forall n \geq 4, 2^n \leq n!$
2. $\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^{k=n} k \times k! = (n+1)! - 1$
3. Le nombre de diagonales dans un polygône à n côtés est $\frac{n(n-3)}{2}$.
4. La dérivée n -ème de la fonction $f : x \mapsto (x-1)e^{-x}$ est donnée par $f^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n-1)e^{-x}$.
5. $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$

Exercice 2 (**)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2$. Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur la valeur de u_n , puis la prouver par récurrence.

Exercice 3 (**)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 4n + 6)$. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n + \frac{1}{3^n}$.

Exercice 4 (***)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = u_1 = 0, u_2 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$. Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur la valeur de u_n , puis la prouver par récurrence.

Exercice 5 (*)

Exprimer à l'aide du symbole Σ les expressions suivantes :

1. $S_1 = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{12}$
2. $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots + \frac{10}{1\,024}$
3. $S_3 = a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \dots + \frac{a^n}{n}$
4. $S_4 = 2 - 4 + 6 - 8 + \dots + 50$

Exercice 6 (** à ***)

Calculer les sommes suivantes :

$$\begin{aligned} & \bullet \sum_{k=1}^{k=n} (2k+1) & \bullet \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k & \bullet \sum_{k=1}^{k=n} 3^{2k} & \bullet \sum_{k=1000}^{k=2021} 3 \\ & \bullet \sum_{k=1}^{k=n} k(2k^2-1) & \bullet \sum_{k=1}^{k=n} 2^k + k^2 + 2 & \bullet \sum_{k=1}^{k=n} (6k^2 + 4k + 1) & \bullet \sum_{k=1}^{k=18} \frac{1}{3^k} & \bullet \sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^k}{3^{k+1}} \end{aligned}$$

Exercice 7 (**)

Déterminer trois réels a , b et c tels que $\forall k \geq 2$, $\frac{k-5}{k(k^2-1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}$. En déduire la valeur de $\sum_{k=2}^{k=n} \frac{k-5}{k(k^2-1)}$.

Exercice 8 (**)

Il s'agit d'une méthode alternative à celle du cours pour calculer la somme des carrés d'entiers.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=1}^{k=n} (k+1)^3 - \sum_{k=1}^{k=n} k^3$.
2. En développant $(k+1)^3$, exprimer $\sum_{k=1}^{k=n} (k+1)^3$ à l'aide de sommes classiques.
3. En comparant les deux calculs précédents, retrouver la valeur de $\sum_{k=1}^{k=n} k^2$.

Exercice 9 (***)

Calculer les sommes doubles suivantes :

$$\bullet \sum_{1 \leq i, j \leq n} ij \quad \bullet \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij \quad \bullet \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j} \quad \bullet \sum_{1 \leq i, j \leq n} |i-j| \quad \bullet \sum_{1 \leq i, j \leq n} i2^j$$

Exercice 10 (**)

Calculer les produits suivants :

$$\begin{aligned} & \bullet \prod_{k=2}^{k=n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) & \bullet \prod_{k=2}^{k=n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) & \bullet \prod_{k=1}^{k=n} (6k-3) \\ & \bullet \prod_{k=1}^n \sqrt{k^2+k} & \bullet \prod_{k=1}^n \frac{4^k}{k^2} & \bullet \prod_{1 \leq i, j \leq n} x^{i+j} \end{aligned}$$

Exercice 11 (***)

Le but de cet exercice est de calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)^3$ de trois façons différentes.

1. Écrire S_n sans utiliser de symbole somme. De combien de termes cette somme est-elle composée ?
2. Calculer S_n en développant $(2k+1)^3$.

- On pose $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} (2k)^3$ et $U_n = \sum_{k=0}^{k=2n+1} k^3$. Expliquer pourquoi $U_n = S_n + T_n$ (à l'aide d'une phrase si vous n'arrivez pas à le faire par le calcul).
- Calculer T_n et U_n .
- Retrouver la valeur de S_n à l'aide des deux questions précédentes.
- Prouver par récurrence que $S_n = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1)$.

Exercice 12 (***)

- Montrer que, si $k \geq 2$, $1 + \frac{1}{k^2} \leq \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}$.
- En déduire que $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \leq 4$ pour tout entier $n \geq 1$.
- Expliquer pourquoi la notation $\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$ a un sens, et ce qu'on peut affirmer sur la valeur d'un tel produit.
- Montrer que, $\forall n \geq 1$, $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) \leq 3 - \frac{1}{n}$.

Exercice 13 (*)

Développer les expressions suivantes : $(x-3)^5$, $(2x+3y)^3$ et $(x-1)^7$.

Exercice 14 (***)

Donner une expression simple des sommes $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$, $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$ (pour les deux dernières, on peut partir de la formule du binôme appliquée à $(1+x)^n$, où x est un réel quelconque, ou simplement exploiter la formule sans nom).

Exercice 15 (*)

Soient p , q et n trois entiers tels que $p+q+2 \leq n$. Montrer que $\binom{n}{2} - \binom{n-p}{2} - \binom{n-q}{2} + \binom{n-p-q}{2} = pq$.

Exercice 16 (***)

On fixe pour tout l'exercice un entier naturel $p \geq 1$.

- Montrer que, $\forall n \geq p$, $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ (on pourra procéder par récurrence sur n).
- Redémontrer la formule précédente directement, à l'aide d'un calcul de somme télescopique (pensez à la relation de Pascal).
- Déduire de la formule démontrée la valeur de $\sum_{k=1}^n k$ et celle de $\sum_{k=1}^n k^2$.

Exercice 17 (**)

Résoudre chacun des systèmes suivants, en distinguant éventuellement des cas suivants les valeurs des paramètres :

- $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -x - 3y + 5z = 2 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}$
- $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ x - 2y + 4z = 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + y + z = -1 \\ x - 3y + 2z = -1 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x + 2y + 3z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = a \end{cases}$
- $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$
- $\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$

Exercice 18 (**)

On considère l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (2x + y, x + 3y + 2z, -3x + 2y + 3z) \end{cases}$. Montrer que f est une application bijective, et déterminer sa réciproque. Effectuer ensuite le même travail pour $g : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (x + 3y + z, -x + 2y + 3z, x + 2y) \end{cases}$.

Exercice 19 (***)

Cet exercice propose une nouvelle méthode de calcul de la somme classique $\sum_{k=1}^n k^3$, méthode que l'on étendra ensuite à la somme $\sum_{k=1}^n k^4$ pour laquelle nous n'avons pas vu de formule en cours.

- Déterminer un polynôme P du quatrième degré vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x+1) - P(x) = x^3$.
- Comment peut-on exprimer de façon plus simple la somme $\sum_{k=0}^n P(k+1) - P(k)$? (question totalement indépendante de la précédente, qui ne nécessite pas de connaître les coefficients du polynôme P)
- En déduire que $\sum_{k=0}^n k^3 = P(n+1)$, puis conclure (on s'arrangera bien sûr pour retrouver la forme factorisée bien connue pour cette somme).
- En utilisant la même méthode que ci-dessus, montrer que $\sum_{k=0}^n k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.
- Redémontrer cette dernière formule par récurrence.

Exercice 20 (**)

Déterminer la valeur de $S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2^k} \binom{k}{n}$.

Problème : autour d'inégalités célèbres (***)

1. Soient $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ deux listes constituées de réels qui sont tous strictement positifs.

(a) En posant $f(x) = \sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2$, expliquer pourquoi f est un polynôme de degré 2.

(b) Calculer le discriminant du polynôme précédent. Que peut-on dire de son signe ?

(c) En déduire l'**inégalité de Cauchy-Schwartz** : $\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$

(d) Vérifier que l'inégalité est en fait une égalité si $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, b_k = a_k$. Déterminer ensuite une condition nécessaire et suffisante pour que l'inégalité de Cauchy-Schwartz soit une égalité.

2. On garde les mêmes hypothèses que dans la question précédente et on pose $m = \min_{1 \leq k \leq n} \frac{a_k}{b_k}$ et

$$M = \max_{1 \leq k \leq n} \frac{a_k}{b_k}.$$

(a) Montrer que $\sum_{k=1}^n a_k^2 + mM \sum_{k=1}^n b_k^2 \leq (m + M) \sum_{k=1}^n a_k b_k$.

(b) Montrer que, si x et y sont deux réels positifs, $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

(c) En déduire que $\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \leq \frac{m+M}{2\sqrt{mM}} \sum_{k=1}^n a_k b_k$ (sorte de « retournement » de l'inégalité de Cauchy-Schwartz).

3. On ne considère maintenant plus qu'une série de réels strictement positifs $(c_1, c_2, \dots, c_n)$.

(a) Montrer que, si $k \leq n$, on a $\sum_{i=1}^k c_i \times \sum_{i=1}^k \frac{i^2}{c_i} \geq \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2$ (on a bien sûr le droit d'utiliser les questions précédentes).

(b) En déduire l'inégalité $\sum_{k=1}^n \frac{k}{c_1 + c_2 + \dots + c_k} \leq 4 \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{c_i} \sum_{k=i}^n \frac{1}{k(k+1)^2}$.

(c) Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{2}{k(k+1)^2} \leq \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$.

(d) En déduire que $\sum_{k=i}^n \frac{1}{k(k+1)^2} \leq \frac{1}{2i^2}$.

(e) Conclure en démontrant l'**inégalité de Hardy** : $\sum_{k=1}^n \frac{k}{c_1 + c_2 + \dots + c_k} \leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k}$.

(f) Que donne cette inégalité lorsque tous les nombres c_i sont égaux ?

(g) En admettant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty$, montrer qu'on ne peut pas obtenir une meilleure constante que le 2 à droite de l'inégalité de Hardy (on pourra poser $c_k = k$ et regarder ce qui se passe quand on fait grandir la valeur de n).