Feuille d'exercices n° 13 : Arithmétique

MPSI Lycée Camille Jullian

28 janvier 2025

Exercice 1 (*)

Déterminer tous les couples d'entiers premiers entre eux dont le produit est égal à 150.

Exercice 2 (*)

Montrer que, $\forall n \in \mathbb{Z}$, le nombre $n^4 - 20n^2 + 4$ est toujours un nombre composé (un nombre entier qui n'est pas premier).

Exercice 3 (*)

Trouver un nombre n de la forme $3^p \times 5^q$ (avec bien sûr p et q entiers naturels) donc le produit des diviseurs est égal à 45^{42}.

Exercice 4 (**)

Montrer que l'équation $x^3 + y^3 + z^3 = 94$ n'a aucune solution $(x, y, z) \in \mathbb{Z}$ (on pourra raisonner modulo 9).

Exercice 5 (*)

Démontrer le critère classique de divisibilité d'un entier par 9.

Exercice 6 (*)

Montrer que, si n et p sont deux entiers, $n^2 + p^2$ est divisible par 7 si et seulement si n et p sont divisibles par 7.

Exercice 7 (**)

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = 3^{4n+2} + 5^{2n+1}$.

1. Montrer par une récurrence simple que u_n est toujours divisible par 14.
2. En utilisant vos connaissances sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2, déterminer deux entiers a et b tels que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.
3. Redémontrer le résultat de la première question à l'aide de celui de la question précédente et d'une récurrence double.

Exercice 8 (**)

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$, montrer que le reste de la division de n^2 par 8 ne peut être égal qu'à 0, 1 ou 4.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \equiv 7[8]$, montrer que n ne peut pas s'écrire comme la somme de trois carrés de nombres entiers (un théorème célèbre affirme que tout entier naturel peut être écrit comme la somme des carrés d'au maximum quatre entiers).

Exercice 9 (**)

1. Déterminer tous les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $n^2 + 7 \mid n^3 + 5$ (il n'y en a pas beaucoup).
2. Déterminer tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $\sqrt{\dfrac{11n-5}{n+4}} \in \mathbb{N}$ (il n'en y a **vraiment** pas beaucoup).

Exercice 10 (**)

Soit n un entier non premier tel que $n \geqslant 6$. Montrer que $n \mid (n-2)!$.

Exercice 11 (**)

Le nombre entier 15 peut s'écrire de quatre façons comme somme d'entiers naturels consécutifs : 15 (oui, il n'y en a qu'un seul donc ce n'est pas vraiment une somme, mais ça compte quand meme), $7+8$, $4+5+6$ et $1+2+3+4+5$. De combien de façons pourrait-on écrire 1050 comme somme d'entiers naturels consécutifs ?

Exercice 12 (**)

On considère l'équation $x^2+y^2 = 7z^2$, dont on cherche à déterminer les solutions entières $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$.

1. Expliquer pourquoi on peut se restreindre à chercher les solutions $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$.
2. On suppose que (x_0, y_0, z_0) est une solution non triviale du problème (autrement dit, $(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$).
   (a) Montrer qu'on peut en déduire une solution $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{N}^3$ vérifiant de plus $\text{pgcd}(x_1, y_1, z_1) = 1$.
   (b) Déterminer l'ensemble des carrés de tous les entiers modulo 7, ainsi que les opposés de ces carrés (on pourra présenter les résultats sous forme de tableau).
   (c) En raisonnant modulo 7, en déduire que x_1 et y_1 sont tous les deux divisibles par 7.
   (d) En déduire une absurdité et conclure.
3. Montrer que l'équation $x^2 + y^2 = 5z^2$ admet par contre une infinité de solutions non triviales. En existe-t-il pour lesquelles $x = 42$? Ou pour lesquelles $z = 42$? Mêmes questions pour l'équation $x^2 + y^2 = 13z^2$.

Exercice 13 (**)

Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$ ne peut pas admettre de solution dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 14 (**)

On fixe un entier naturel $p \geqslant 2$ et on pose, pout tout entier naturel n, $a_n = p^n - 1$.

1. Soient b et c deux entiers naturels, q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de b par c. Montrer que $a_b \wedge a_c = a_c \wedge a_r$.
2. En déduire qu'on a toujours $a_b \wedge a_c = a_{b \wedge c}$.

Exercice 15 (***)

On note, pour tout entier naturel n, $F_n = 2^{2^n} + 1$ (non, non, ce F n'a ici rien à voir avec Fibonacci, il s'agit d'un F comme Fermat, ces nombres étant effectivement connus comme « nombres de Fermat ». Ledit Fermat a conjecturé qu'il étaient tous premiers, mais il s'est planté dans les grands largeurs, puisque qu'aucun nombre de Fermat n'est premier pour des valeurs de n comprises entre 5 et 32. Ensuite, eh bien on n'en sait rien).

1. Donner les valeurs de F_n lorsque $n \leqslant 4$, et vérifier que ce sont des nombres premiers (vous avez le droit d'écrire un programme Python pour F_4).
2. Vérifier la relation de récurrence $F_{n+1} = 2 + (F_n - 2)F_n$.
3. En déduire une expression de F_n en fonction de tous les F_k, pour k variant de 1 à $n-1$.
4. Montrer que, si $n \neq p$, $F_n \wedge F_p = F_{n \wedge p}$.

Exercice 16 (**)

Déterminer le nombre de diviseurs de 10! (sans les écrire tous).

Exercice 17 (***)

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

1. $xy = 2x + 3y$.
2. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$.
3. $x^2 = 9y^2 - 39y + 40$.
4. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$.
5. $9x^2 - y^2 = 32$.
6. $15x^2 - 7y^2 = 9$ (on pourra raisonner modulo 3).
7. $y^3 = x^2 + x$

Exercice 18 (**)

1. Montrer que, pour tout entier premier p et tout entier naturel n, $v_p(n!) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ (cette somme n'est pas une vraie somme infinie).
2. Par combien de zéros se termine l'écriture décimale de l'entier 100! ?

Exercice 19 (***)

On considère la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.
2. Montrer que F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $F_{n+p} = F_nF_{p-1} + F_{n+1}F_p$. En déduire que le pgcd de F_n et de F_p est le même que celui de F_n et F_{n+p}.
4. Montrer que, $\forall (n, m) \geqslant 2$, $F_n \wedge F_m = F_{n \wedge m}$.
5. Montrer que, si $n \geqslant 5$ et F_n est premier, alors n est premier. La réciproque est-elle vraie ?
6. Vérifier que F_8 est le premier terme de la suite divisible par 7, puis montrer que F_n est divisible par 7 si et seulement si n est un multiple de 8.

Exercice 20 (**)

Pour tout entier naturel non nul n, on note $S(n)$ la somme de ses diviseurs.

1. Calculer $S(n)$ pour $n = 32$, $n = 28$ et $n = 60$.
2. Que vaut $S(n)$ lorsque n est premier ?
3. Que vaut $S(n)$ lorsque $n = p^k$, où p est un entier premier, et k un entier supérieur ou égal à 2 ?
4. Montrer que, si la décomposition en facteurs premiers de n s'écrit $n = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ (avec des p_i premiers et des α_i tous non nuls), alors $S(n) = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$.
5. Montrer que, si m et n sont premiers entre eux, alors $S(mn) = S(m)S(n)$.

Exercice 21 (***)

1. Montrer que tout nombre premier autre que 2 est congru à 1 ou 3 modulo 4.
2. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4 (en raisonnant par l'absurde, on posera n égal au produit de tous les nombres premiers congrus à 3 modulo 4 puis on posera $m = 4n - 1$).
3. Montrer de même qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 5 modulo 6.

Exercice 22 (**)

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

1. Montrer que $(a+b) \wedge (a \vee b) = a \wedge b$.
2. Trouver tous les couples (a, b) vérifiant $a + b = 144$ et $a \vee b = 420$.

Exercice 23 (***)

Un entier naturel non nul n est dit **parfait** si la somme de ses diviseurs (notée $S(n)$ pour tout l'exercice) est égale à $2n$.

1. Vérifier que 6 et 28 sont des nombres parfaits.
2. Soit p un entier tel que $2^p - 1$ soit premier. Montrer que p est alors premier.
3. Montrer alors que $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ est parfait.
4. En déduire la valeur d'un nombre parfait plus grand que 28.
5. On suppose désormais que n est un entier parfait pair, et on pose $n = 2^a \times b$, avec b impair, et $a \geqslant 1$.
   (a) Montrer que $S(n) = (2^{a+1} - 1)S(b)$. En déduire que $S(b) = 2^{a+1}c$, avec $c \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer qu'on a nécessairement $c = 1$, et que b est un nombre premier.
   (c) En déduire que n est forcément de la forme $2^{p-1}(2^p - 1)$, avec $2^p - 1$ premier.

Problème (***)

On note $G = \{a + bi \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ l'ensemble des **entiers de Gauss** dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que $(G, +, \times)$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
2. Montrer que G est un anneau intègre.
3. Pour x et y entiers de Gauss (avec y non nul), on note a et b les parties réelle et imaginaire de $\dfrac{x}{y}$.
   (a) Montrer que a et b sont des nombres rationnels.
   (b) Montrer qu'il existe un couple (p, q) d'entiers relatifs tels que $|a - p| \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $|b - q| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   (c) Montrer qu'il existe un entier de Gauss z tel que $|x - yz| < |y|$.
   (d) Montrer que z n'est pas forcément unique.
4. Si x et y sont deux entiers de Gauss, on dira que x divise y si $y = zx$, avec z un entier de Gauss.
   (a) Montrer que, si x divise y, alors $|x|^2$ divise $|y|^2$ (au sens de la divisibilité dans $\mathbb{N}$).
   (b) Montrer que l'ensemble des diviseurs d'un entier de Gauss est toujours fini.
   (c) Proposer un algorithme permettant de déterminer un diviseur commun de plus grand module pour deux entiers de Gauss.
   (d) Déterminer un diviseur commun de plus grand module de $7 + 11i$ et de $1 + 8i$.
5. Déterminer l'ensemble des diviseurs de 1 dans G, qu'on appellera **unités** de G. On notera U l'ensemble des unités de G.
6. Montrer que U est un groupe multiplicatif.
7. Montrer que tout couple d'entiers de Gauss non nuls possède exactement quatre diviseurs communs de plus grand module.
8. Un entier de Gauss est **élémentaire** si ses seuls diviseurs sont les unités et les produits de ces unités par lui-même.
   (a) Donner un exemple d'entier de Gauss élémentaire (autre que les unités).
   (b) Montrer qu'il existe une infinité d'entiers de Gauss élémentaires.
9. Deux entiers de Gauss sont **étrangers** si leurs seuls diviseurs communs sont les éléments de U.
   (a) Montrer que, si x et y sont étrangers, il existe un couple (u, v) d'entiers de Gauss tels que $ux + vy = 1$.
   (b) Montrer que, si x, y et z sont deux entiers de Gauss tels que x divise yz et x et y sont étrangers alors x divise z.