Chapitre 17 : Espaces vectoriels

MPSI Lycée Camille Jullian

17 mars 2025

Supposé qu'Euclide et ses prédécesseurs aient considéré
le triangle comme une moitié de carré ou, mieux, d'un parallélogramme :
ils auraient été immédiatement conduits au vecteur,
c'est-à-dire à la structure de l'espace comme espace vectoriel.

Michel Serres

Commment habille-t-on un espace vectoriel ?
Avec une combinaison linéaire !

Nous entamons avec ce premier chapitre consacré aux espaces vectoriels une partie essentielle de votre programme, consacrée à un domaine fondamental des mathématiques appelé algèbre linéaire. Contrairement à ce que le terme espace vectoriel pourrait vous laisser croire, il sera très peu question de géométrie dans ce chapitre (et même dans les suivants que nous consacrerons à l'algèbre linéaire, à l'exception de l'étude des espaces euclidiens que nous effectuerons en toute fin d'année), le concept d'espace vectoriel étant en fait de créer une structure mathématique abstraite permettant de faire des calculs géométriques dans des ensembles qui n'ont a priori pas vocation à être appréhendés de façon géométrique, comme des ensembles de matrices ou de fonctions.

Le point essentiel qui relie entre eux ces ensembles a priori si différents (et aussi des ensembles plus naturellement géométriques, car le terme « espace vectoriel » n'a tout de même pas été choisi au hasard) est que l'on peut y définir une notion de représentation des éléments de l'ensemble à partir de quelques éléments bien choisis à l'aide d'un calcul de coordonnées. On peut alors étendre à ces ensembles toutes les notions classiquement appliquées dans le cadre de la géométrie analytique, et surtout énoncer des résultats généraux qui pourront s'appliquer de façon identique à des structures et ensembles a priori assez éloignés.

Ce chapitre est généralement considéré par les élèves comme difficile, parce que vous n'avez pas (encore) l'habitude de travailler dans le cadre assez formel de l'algèbre linéaire, et que les ensembles manipulés sont trop complexes pour pouvoir se baser sur l'intuition géométrique (on retrouvera pourtant, malgré tout, beaucoup de vocabulaire « géométrique »). Pourtant, les calculs effectués sont en général très simples (en gros uniquement des résolutions de systèmes à quelques inconnues) et les notions abordées ne font que reproduire ce que vous avez déjà étudié en géométrie dans le plan ou l'espace dans les classes inférieures. L'essentiel dans ce domaine tout neuf pour vous est de bien comprendre les définitions, et d'être très rigoureux dans l'emploi des notations, en respectant notamment la nature des objets mathématiques manipulés.

Objectifs du chapitre :

- maîtriser tout le vocabulaire introduit dans ce chapitre, et connaître parfaitement les différentes méthodes permettant de faire les calculs classiques (montrer qu'une famille est une base, montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires).
- savoir résoudre sans la moindre hésitation les petits systèmes linéaires, et exprimer leurs solutions sous forme vectorielle.
- savoir utiliser des arguments de dimension pour simplifier les démonstrations d'algèbre linéaire.

1 Espaces et sous-espaces vectoriels.

1.1 Définitions, exemples.

Comme d'habitude quand on fait de l'algèbre, on notera $\mathbb{K}$ un corps quelconque, mais en pratique on aura **toujours** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ quand on manipulera des espaces vectoriels.

Définition 1. Un ensemble E est un **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ s'il est muni des deux opérations suivantes :

- une addition $+$: $\left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array} \right.$
- un produit **extérieur** . : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, u) & \mapsto & \lambda u \end{array} \right.$

et que ces opérations vérifient les conditions suivantes :

- $(E, +)$ est un groupe commutatif dont l'élément neutre sera noté 0_E et appelé **vecteur nul** dans l'espace vectoriel E.
- L'élément 1 est un élément neutre pour le produit extérieur : $\forall u \in E$, $1.u = u$.
- Le produit extérieur est compatible avec le produit dans $\mathbb{K}$: $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall u \in E$, $\lambda.(\mu.u) = (\lambda\mu).u$.
- Le produit est doublement distributif par rapport à l'addition : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall u \in E$, $(\lambda + \mu).u = \lambda.u + \mu.u$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall u, v \in E^2$, $\lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda.v$.

Remarque 1. Ces conditions peuvent paraitre complexes, mais on ne les vérifie absolument jamais en pratique, et on peut en fait les résumer simplement par le fait qu'il y a deux opérations sur notre ensemble E : une addition, et un produit par des « constantes », qui sont suffisament « logiques » pour vérifier des conditions assez naturelles. Remarquons d'ailleurs que l'addition sera toujours notée avec le symbole $+$, ce qui sous-entend fortement que le groupe $(E, +)$ est un groupe additif.

Définition 2. Les éléments d'un espace vectoriel E sont appelés **vecteurs** (même lorsqu'ils n'ont rien à voir avec les vecteurs que vous avez étudié au collège et au lycée), et les éléments de $\mathbb{K}$ par lesquels on peut les multiplier sont appelés **scalaires** (terme dont est issu notamment le terme de produit scalaire, qui désigne un produit de vecteurs dont le résultat est un scalaire).

Exemples :

- L'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples (x, y) de réels est un espace vectoriel réel quand il est muni de l'addition $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ et du produit extérieur $\lambda.(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$, c'est-à-dire des opérations de manipulations naturelles de coordonnées de points dans le plan. L'espace vectoriel correspondant sera naturellement un espace de dimension 2 (c'est-à-dire pour lequel tout élément peut être décrit à l'aide de deux réels indépendants).
- De même, l'ensemble $\mathbb{R}^3$ des triplets (x, y, z) de réels est un espace vectoriel, muni des opérations similaires à celles décrites dans l'exemple précédent. Plus généralement, l'ensemble $\mathbb{R}^n$ des n-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de réels, sera aussi un espace vectoriel, qui sera de dimension n (le fait de travailler avec des coordonnées dans un espace de dimension strictement supérieure à 3 ne pose aucun problème, sauf bien sûr celui de la visualisation concrète de la géométrie sous-jacente).
- L'ensemble des vecteurs du plan, muni de la somme vectorielle (celle que vous avez apprise il y a quelques années, définie par la relation de Chasles) et du produit des vecteurs par les réels, est un espace vectoriel réel, qu'on assimile en pratique à $\mathbb{R}^2$ quand on identifie un vecteur du plan à ses coordonnées dans un repère du plan. De même, l'ensemble des vecteurs de l'espace est également un espace vectoriel (le terme même « espace vectoriel » est bien sûr issu de ces exemples).
- L'ensemble $\mathbb{C}$ (et plus généralement $\mathbb{C}^n$) est un espace vectoriel réel, mais aussi un espace vectoriel complexe. La différence entre ces deux structures sur un même ensemble sera notable au niveau de la dimension. Intuitivement, $\mathbb{C}$ sera de dimension 1 comme espace vectoriel complexe, mais de dimension 2 comme espace vectoriel réel. Cela revient à dire qu'un nombre complexe peut être décrit à l'aide de deux nombres réels indépendants (par exemple en l'écrivant sous la forme algébrique $z = a + ib$, ce qui revient encore une fois à se ramener à des coordonnées quand on identifie $\mathbb{C}$ à l'ensemble des points d'un plan), mais bien entendu à l'aide d'un seul nombre complexe.
- L'ensemble de toutes les suites réelles est un espace vectoriel réel, la somme de deux suites (u_n) et (v_n) étant la suite $(u_n + v_n)$, et le produit d'une suite (u_n) par un réel λ étant la suite (λu_n). C'est un exemple classique d'espace vectoriel auquel on ne peut pas associer une dimension (il contient beaucoup « trop » d'objets), ce qu'on appellera un espace vectoriel de dimension infinie.
- De même, l'ensemble de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni des opérations naturelles, est un espace vectoriel. L'ensemble de toutes les fonctions continues en est aussi un, inclus dans le précédent.
- L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes est un espace vectoriel (on a prouvé toutes les propriétés de la définition précédente dans le cas des matrices lors de notre chapitre consacré au calcul matriciel). Attention toutefois, l'ensemble de toutes les matrices (sans spécification de taille) n'est pas un espace vectoriel (on ne peut pas additionner deux matrices de taille différente).
- L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un espace vectoriel (mais l'ensemble des polynômes de degré exactement n ne serait pas un espace vectoriel, d'où d'ailleurs l'intérêt de la notation $\mathbb{R}_n[X]$). L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ de tous les polynômes à coefficients réels est aussi un espace vectoriel (qui contient tous les espaces $\mathbb{R}_n[X]$).

1.2 Sous-espaces vectoriels.

Définition 3. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Un sous-ensemble F de E est un **sous-espace vectoriel** de E s'il est lui-même un espace vectoriel (muni de l'addition et de la multiplication induites par celles de E).

Proposition 1. *F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si*

- $F \neq \emptyset$
- $\forall (u,v) \in F^2,\ u+v \in F$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u \in F,\ \lambda u \in F.$

Remarque 2. Autrement dit, F est un sous-espace vectoriel de E s'il est non vide (en pratique, on vérifie souvent que l'élément nul 0_E appartient à F, car ce sera nécessairement le cas si F est un sous-espace vectoriel de E) et stable par addition et par multiplication par un réel. La proposition est évidente, l'interminable liste de propriétés définissant un espace vectoriel restant vérifiée sur F à partir du moment où les résultats des deux opérations de base restent des éléments de F.

Remarque 3. On peut remplacer les deux dernières conditions de la propriété par une seule vérification : F est un sous-espace vectoriel de E si F et non vide et stable par combinaisons linéaires, c'est-à-dire que $\forall (u,v) \in F^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda u + \mu v \in F$.

On utilisera dans la suite du cours l'abréviation sev pour désigner un sous-espace vectoriel.

Exemples : Il existe des quantités d'exemples dans tous les espaces vectoriels classiques cités au paragraphe précédent. Il est essentiel de comprendre rapidement ce qui fait d'un sous-ensemble un sev. Quelques exemples concrets :

- Dans $\mathbb{R}^3$, l'ensemble $F = \{(x,y,z) \mid x+y+z=0\}$ est un sous-espace vectoriel mais $G = \{(x,y,z) \mid x+y+z=1\}$ n'en est pas un (il ne contient pas 0, et n'est stable ni par somme ni par produit par un réel !). Ces deux sous-ensembles sont géométriquement des plans dans l'espace, mais pour être un sev, le plan doit nécessairement contenir l'origine de $\mathbb{R}^3$ (l'autre exemple donné sera ce qu'on appellera plus loin dans le chapitre un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$). L'ensemble $H = \{(x,y,z \mid x^2-y^2+z^2=0\}$ n'est pas non plus un sous-espace vectoriel, car il n'est pas stable par somme (par exemple, $(1,1,0)$ et $(0,1,1)$ appartient tous les deux à H, mais pas leur somme $(1,2,1)$). Ici, c'est le fait que l'équation ne soit pas linéaire qui empêche H d'être un sev. On peut en fait prouver que les seuls sous-espaces non triviaux de $\mathbb{R}^3$ (autres que le cas très particulier $\{0\}$ et que $\mathbb{R}^3$ tout entier) sont les droites et plans contenant 0.
- $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ (quelle que soit la valeur de n).
- L'ensemble des matrices diagonales à trois lignes et trois colonnes est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En effet, la somme de deux matrices diagonales est diagonale, et le produit d'une matrice diagonale par un réel est diagonale (et bien entendu, cet ensemble est non vide).
- L'ensemble des fonctions solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 0$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En effet, la somme de deux solutions d'une équation différentielle homogène, ou le produit d'une solution par un réel, est solution de la même équation.

Exercice : Soit E l'espace vectoriel des suites réelles. Parmi tous les sous-ensembles suivants, déterminer lesquels sont des sous-espaces vectoriels de E.

- $F_1 = \{$suites croissantes$\}$.
- $F_2 = \{$suites monotones$\}$.
- $F_3 = \{$suites constantes$\}$.
- $F_4 = \{$suites ayant une limite finie$\}$.
- $F_5 = \{$suites ayant une limite (finie ou non)$\}$.
- $F_6 = \{$suites arithmétiques$\}$.
- $F_7 = \{$suites géométriques$\}$.
- $F_8 = \{$suites récurrentes linéaires d'ordre 2$\}$.
- $F_9 = \{$suites vérifiant la relation $u_{n+3} = 2u_{n+1} - u_n\}$.
- $F_{10} = \{$suites périodiques$\}$.

Corrigé de l'exercice

- F_1 n'est pas un sev, il est non vide et stable par somme, mais le produit d'une suite croissante (et non constante) par -1 est rarement une suite croissante.
- F_2 n'est pas un sev non plus, il est cette fois-ci stable par produit extérieur mais plus par somme, la somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante n'est pas toujours monotone (en fait, on en est loin, toute suite réelle peut s'écrire comme somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante).
- F_3 est un sev (aucune difficulté pour les stabilités par somme et produit extérieur ici).
- F_4 est aussi un sev (règles de calcul usuelles sur les limites pour les deux stabilités).
- F_5 n'est plus un sev car il n'est pas stable par somme. Par exemple, en posant $u_n = n$ et $v_n = \sin(n) - n$, les deux suites appartiennent à F_5 (elles tendent respectivement vers $+\infty$ et vers $-\infty$), mais pas leur somme $u_n + v_n = \sin(n)$, qui n'a pas de limite.
- F_6 est un exemple classique de sev. Si (u_n) et (v_n) sont arithmétiques, alors $u_n = u_0 + nr$ et $v_n = v_0 + nr'$, et on en déduit $u_n + v_n = (u_0 + v_0) + n(r + r')$, ce qui est toujours le terme général d'une suite arithmétique (on additionne simplement les premiers termes et les raisons). La stabilité par produit extérieur est encore plus simple.
- F_7, par contre, n'est pas un sev, la somme de deux suites géométriques n'ayant pas la même raison n'est pas une suite géométrique (mais une suite récurrente linéaire d'ordre 2). Si on veut un contre exemple concret, on pose $u_n = 2^n$ et $v_n = 3^n$. Les trois premiers termes de la suite $(u_n + v_n)$ valent alors 2, 5 et 13, ce qui ne peut pas correspondre à une suite géométrique (les quotients de termes consécutifs ne sont pas égaux).
- F_8 n'est pas non plus un sev, pour à peu près la même raison que les suites géométriques : une suite récurrente linéaire d'ordre 2 peut se mettre sous la forme $\alpha r^n + \beta s^n$ (somme de deux suites géométriques) quitte à autoriser des raisons complexes, et si on en additionne deux ayant des racines r et s différentes, on n'obtiendra absolument pas une suite récurrente linéaire d'ordre 2 (je ne donne pas de contre-exemple concret car c'est un peu pénible à vérifier très rigoureusement).
- F_9 est par contre un sev, une fois fixée une récurrence linéaire précise, la stabilité ne pose plus de problème (il suffit d'additionner les relations pour (u_n) et (v_n) pour obtenir la même relation pour $(u_n + v_n)$).
- F_{10} est un sev : si (u_n) est périodique de période p et (v_n) périodique de période q, leur somme sera périodique de période pq (car pq est une période commune à (u_n) et (v_n)). Les autres propriétés sont facilement vérifiées.

1.3 Combinaisons linéaires.

Définition 4. Une **famille de vecteurs** dans un espace vectoriel E est une liste $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de vecteurs de E.

Remarque 4. Attention au niveau de la notation à ne pas confondre par exemple un vecteur de $\mathbb{R}^6$, qui est une simple liste de six nombres réels, par exemple $u = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$, avec une famille de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^2$, qui sera notée $\mathcal{F} = ((1, 2), (3, 4), (5, 6))$, ou même avec une famille de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, notée $((1, 2, 3), (4, 5, 6))$. L'emploi des doubles parenthèses est bien entendu obligatoire dans ce genre de contexte.

Définition 5. Une **combinaison linéaire** des vecteurs d'une famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est un vecteur pouvant s'écrire sous la forme $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$, avec $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

Remarque 5. On peut en fait étendre ces notions à des familles infinies de vecteurs $(e_i)_{i \in I}$. Dans ce cas, on dira qu'un vecteur u est combinaison linéaire de la famille (e_i) s'il existe une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i \in I}$ **presque nulle** telle que $x = \displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i e_i$, c'est-à-dire une famille de scalaires dont seuls un nombre fini sont non nuls (précision superflue dans le cas d'une famille finie, bien entendu). Ainsi, tout polynôme (quel que soit son degré) peut être écrit comme une combinaison linéaire de la famille infinie $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par contre, $1+X+X^2+\cdots+X^n+\cdots = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} X^n$ n'est pas combinaison linéair de cette famille (et n'est d'ailleurs pas un polynôme pour cette raison).

Proposition 2. Soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E, on note alors $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$. Cet ensemble est un sous-espace vectoriel de E, et c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant tous les éléments de $\mathcal{F}$ (c'est-à-dire que, si F est un autre sous-espace vectoriel contenant tous les vecteurs de la famille, alors nécessairement $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) \subset F$). On l'appelle **sous-espace vectoriel engendré** par la famille $\mathcal{F}$.

Démonstration. Montrons la stabilité de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ par les deux opérations habituelles. Une somme de deux combinaisons linéaires est bien une combinaison linéaire : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) e_i$, et de même pour un produit par un réel : $\displaystyle\mu \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{n} (\mu\lambda_i) e_i$, donc $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ est bien un sev de E. De plus, un sev contenant les éléments de la famille contient aussi ses combinaisons linéaires puisqu'il doit être stable par combinaisons linéaires, donc il contient forcément $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. □

Exemple : L'ensemble F des solutions du système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & & & - & z & = & 0 \\ x & - & y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right.$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Si on résout le système (en exprimant par exemple y et z en fonction de x), on trouve facilement que $F = \{(x, 7x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,7,2) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,7,2))$. On exprimera désormais systématiquement les solutions de systèmes d'équations homogènes à l'aide de cette notation Vect.

Remarque 6. Le simple fait d'écrire un sous-ensemble d'un espace vectoriel « sous la forme d'un Vect » prouve qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel et dispense donc de toute vérification de stabilité par la somme et le produit extérieur.

Exemple : Dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, et on cherche à déterminer $F = \{M \in E \mid AM = MA\}$ (c'est-à-dire l'ensemble des matrices commutant avec la matrice A), et en particulier à prouver que F est un sev de E. Pour cela, on pose tout simplement $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, et on calcule AM et MA puis on traduit la condition $AM = MA$ par le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} a & + & 2c & = & a & - & b \\ b & + & 2d & = & 2a & + & b \\ -a & + & c & = & c & - & d \\ -b & + & d & = & 2c & + & d \end{array}\right.$. Les deux équations extrêmes du système donnent la même condition $b = -2c$. Les deux équations centrales du système donnent également la même condition $a = d$. On obtient donc $F = \left\{\begin{pmatrix} d & -2c \\ c & d \end{pmatrix} \mid (c,d) \in \mathbb{R}^2\right\}$, ou encore $F = \left\{c \times \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \times I_2 \mid (c,d) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, I_2\right)$, ce qui prouve en particulier que F est bien un sev de E.

1.4 Familles libres, familles génératrices, bases.

Définition 6. Une famille $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs d'un espace vectoriel E est **génératrice** si tout élément de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de la famille : $\forall u \in E$, $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Autrement dit, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) = E$.

Exemple : Dans $\mathbb{R}_n[X]$, la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est génératrice par définition même de ce qu'est un polynôme : il peut s'écrire sous la forme $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_n X^n$.

Remarque 7. Pour prouver qu'une famille est génératrice, on écrit l'équation $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = u$ sous la forme d'un système d'équations, dont on essaie ensuite de prouver qu'il admet toujours des solutions (pas forcément uniques), indépendamment du second membre du système. Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, on considère la famille de trois vecteurs $\mathcal{F} = ((1,0,1),(0,1,-1),(1,1,1))$, et on veut savoir si elle est génératrice de $\mathbb{R}^3$. On pose donc $u = (x,y,z)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$, et on écrit la condition $\lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(0,1,-1) + \lambda_3(1,1,1) = (x,y,z)$, qui est équivalente au système $\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & x \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & y \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & z \end{array}\right.$. En soustrayant la troisième équation à la première, $\lambda_2 = x - z$, puis en reportant dans la deuxième équation $\lambda_3 = y - x + z$, et enfin $\lambda_1 = x - \lambda_3 = 2x - y - z$. Il y a toujours une solution au système (et même une solution unique en l'occurrence), donc la famille $\mathcal{F}$ est bien génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Exemple : La famille de vecteurs $\mathcal{F} = ((1,1,1),(2,0,-1),(0,2,3))$ n'est pas génératrice. En appliquant la même méthode que précédemment, on doit résoudre le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & & & = & x \\ \lambda_1 & & & + & 2\lambda_3 & = & y \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & z \end{array}\right.$.
Si on cherche à résoudre le système par substitution, on trouve $\lambda_2 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\lambda_1$ et $\lambda_3 = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\lambda_1$, si on remplace dans la dernière équation, on aura $\lambda_1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}\lambda_1 = z$, donc (quitte à tout multiplier par deux) $3y - x = 2z$. L'inconnue λ_1 ayant disparu, le système n'aura pas de solution si la condition $3y - x = 2z$ n'est pas vérifiée, ce qui ne sera évidemment pas le cas pour tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Remarquons que, dans le cas d'une famille de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, le caractère générateur de la famille dépend du fait qu'un système carré soit ou non un système de Cramer, donc du fait que la matrice contenant les coordonnées des trois vecteurs de la famille soit inversible ou non (ce qu'on pourra mieux expliquer plus loin dans ce chapitre).

Définition 7. Une famille de vecteurs $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs d'un espace vectoriel E est **libre** si aucun de ses éléments n'est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille (on dit alors que ses vecteurs sont linéairement indépendants). Autrement dit, si $(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0) \Rightarrow (\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_i = 0)$. Dans le cas contraire, on dit que la famille de vecteurs est **liée**.

Remarque 8. Pour prouver qu'une famille est libre, on va encore utiliser une résolution de système, mais il s'agira cette fois d'un système homogène, dont on cherche à savoir si la solution nulle (qui sera trivialement toujours une solution de ce système) est la seule solution du système.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $((2,1,0),(1,-1,-1),(0,3,-1))$ est libre car le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & & & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \\ & & 3y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$ a pour unique solution $(0,0,0)$: en effet, $z = 3y$, $x = y + z = 4y$, donc $2x + y = 5y = 0$, et les trois inconnues sont donc nulles.

Exemple 2 : La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ déjà citée plus haut est également libre dans $\mathbb{R}_n[X]$ (de façon évidente : si $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i X^i = 0$, alors tous les coefficients λ_i sont nuls).

Exemple 3 : Dans l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, considérons la famille constituée des quatre fonctions $f_1 : x \mapsto e^x$, $f_2 : x \mapsto e^{2x}$, $f_3 : x \mapsto e^{3x}$ et $f_4 : x \mapsto e^{4x}$. On ne peut cette fois-ci pas vraiment écrire un système correspondant à l'annulation de notre combinaison linéaire (c'est lié au fait que l'espace vectoriel dans lequel on travaille est de dimension infinie). En fait, la condition $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) + \lambda_4 f_4(x) = 0$ doit être vérifiée pour tout réel x, ce qui correspondrait à une sorte de système contenant une grosse infinité d'équations (une pour chaque valeur possible de x). On peut très bien prendre des valeurs de x en nombre suffisant pour avoir un système dont l'unique solution est la solution triviale (pour prouver que la famille est libre), mais on peut faire un peu plus élégant ici en exploitant des calculs de limite.

En factorisant l'équation par e^{4x} (qui ne s'annule jamais), on obtient la condition équivalente $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 e^{-3x} + \lambda_2 e^{-2x} + \lambda_3 e^{-x} + \lambda_4 = 0$. Si cette expression est toujours nulle, elle doit certainement avoir pour limite 0, ce qui implique directement $\lambda_4 = 0$. On reprend ensuite le même calcul en factorisant cette fois par e^{3x} pour obtenir $\lambda_3 = 0$, et ainsi de suite pour annuler les deux derniers coefficients (cette même méthode fonctionnerait d'ailleurs avec une famille de n fonctions définies de façon similaire, quel que soit l'entier naturel n). La famille est donc libre.

Remarque 9. Une façon intuitive de comprendre les notions de familles libre et génératrice est la suivante : une famille génératrice contient « suffisamment » de vecteurs pour reconstituer l'espace vectoriel tout entier à l'aide de combinaisons linéaires, mais peut éventuellement en avoir « trop » dans le sens où il peut subsister dans la famille des vecteurs inutiles (au sens où, même en les supprimant de la famille, on aura encore une famille génératrice). Au contraire, une famille ne peut pas contenir de vecteur « inutile » (qui serait déjà combinaison linéaire des autres, et n'ajouterait donc rien à l'espace vectoriel engendré), mais peut par contre ne pas contenir assez de vecteurs pour engendrer l'espace tout entier. Attention, il n'y a pas de lien évident entre le fait qu'une famille soit libre, et le fait qu'elle soit génératrice. Une famille qui n'est pas génératrice peut très bien ne pas être libre non plus (famille de trois vecteurs coplanaires dans l'espace, par exemple).

Définition 8. Une famille de vecteurs est une **base** d'un espace vectoriel E si elle est à la fois libre et génératrice. Autrement dit, tout élément de E peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire d'éléments de la famille.

Remarque 10. En lien avec une la remarque précédente, une base est donc une famille qui contient assez de vecteurs pour engendrer tout l'espace, mais pas trop non plus, de façon à ce que l'écriture sous forme de combinaison linéaire soit toujours unique. Cette unicité est indispensable pour définir de façon cohérente la notion de coordonnées, qui est à la base de tous les calculs que nous allons désormais faire dans les espaces vectoriels.

Définition 9. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $u \in E$. Il existe donc un unique n-uplet de réels $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tel que $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Les réels λ_i sont appelés **coordonnées** du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$, et les vecteurs $\lambda_i e_i$ **composantes** du vecteur u dans cette même base. On note parfois $u = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)_{\mathcal{B}}$ pour désigner les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée.

Remarque 11. Les coordonnées sont donc des nombres réels, alors que les composantes sont des vecteurs. Ces composantes correspondent géométriquement à la projection du vecteur u sur l'axe dirigé par le vecteur e_i. Nous reviendrons dans le prochain chapitre sur cette notion de projection dans un espace vectoriel quelconque (il ne s'agit absolument pas ici de projections orthogonales, puisque la notion même d'orthogonalité n'existe pas dans un espace vectoriel quelconque).

1.5 Opérations sur les sous-espaces vectoriels.

Proposition 3. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, on définit F comme l'ensemble des solutions de l'équation $x - y + 2z = 0$, et $G = \text{Vect}((1, 0, -1), (-2, 1, 1))$. Ces deux ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, leur intersection en est donc aussi un. Pour la décrire le plus simplement possible, le mieux est d'écrire les vecteurs de G comme combinaisons linéaires, et de leur faire vérifier l'équation définissant F : $u \in G \Leftrightarrow u = (\lambda - 2\mu, \mu, \mu - \lambda)$, pour un certain couple de réels (λ, μ). Le vecteur u appartient aussi à F si $\lambda - 2\mu - \mu + 2\mu - 2\lambda = 0$, soit $-\lambda - \mu = 0$, donc $\mu = -\lambda$. On a alors $u = (3\lambda, -\lambda, -2\lambda)$, dont on déduit que $F \cap G = \text{Vect}((3, -1, -2))$. De façon cohérente, l'intersection de F et de G, qui sont tous les deux des plans de $\mathbb{R}^3$, est une droite.

Remarque 12. L'union de deux sous-espaces vectoriels n'est par contre en général pas du tout un sev (ce n'est en fait le cas que si l'un des deux sous-espaces est inclus dans l'autre). Par exemple, l'union de deux droites non confondues dans $\mathbb{R}^2$ n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$ (ces derniers étant uniquement, outre $\mathbb{R}^2$ tout entier et le sev réduit au vecteur nul, les droites passant par l'origine). Ce qui joue en quelque sorte le rôle d'union de sev est la notion que nous allons maintenant définir.

Définition 10. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E. La **somme** des espaces F et G, notée tout simplement $F + G$, est l'ensemble $F + G = \{(u + v) \mid u \in F, v \in G\}$.

Proposition 4. La somme $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E. C'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant à la fois F et G.

Démonstration. C'est facile : $\lambda(u + v) + \mu(u' + v') = (\lambda u + \mu v) + (\lambda u' + \mu v')$, donc $F + G$ est stable par combinaisons linéaires en supposant que F et G le sont. Par ailleurs, un sous-espace vectoriel contenant F et G contiendra toutes les combinaisons linéaires d'éléments de F et de G, et a fortiori $F + G$ (les éléments de la forme $u + v$ étant des cas très particuliers de combinaisons linéaires). $\square$

Proposition 5. Si $\mathcal{B}$ est une base de l'espace vectoriel F, et $\mathcal{B}'$ une base de G, alors $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ est une famille génératrice de $F + G$.

Démonstration. C'est essentiellement trivial. Si w est un vecteur de $F + G$, on peut l'écrire sous la forme $u + v$, avec $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ (en notant $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$) et $v = \sum_{i=1}^{p} \mu_i e' i$ (en notant de même $\mathcal{C} = (e'_1, \dots, e'_n)$), donc $u + v$ est bien une combinaison linéaire des éléments de la famille $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$, ce qui prouve bien que cette dernière est génératrice. $\square$

Remarque 13. Attention, la famille $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ n'a par contre aucune raison d'être une base de $F + G$, il est tout à fait possible qu'on ait des vecteurs inutiles quand on regroupe les deux familles (on peut même tout à fait avoir des vecteurs en commun dans les deux bases).

Définition 11. Deux sous-espaces vectoriels F et G d'un même espace vectoriel sont en **somme directe** si $F \cap G = \{0\}$. On note dans ce cas leur somme $F \oplus G$ au lieu de simplement la noter $F + G$.

Remarque 14. Dans le cas d'une somme directe, la famille obtenue en réunissant des bases respectives de F et de G sera automatiquement une base de $F \oplus G$. En effet, si on note $(e_1, \dots, e_n)$ une base de F et $(e'_1, \dots, e'_p)$ une base de G, une combinaison linéaire de la famille obtenue en réunissant les deux bases s'nanule si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{p} \mu_j e'_j = 0$, donc si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = -\sum_{j=1}^{p} \mu_j e'_j$ (comme d'habitude, λ_i et μ_j désignent des coefficients réels). Or, le vecteur du membre de gauche de cette égalité appartient à F, et celui de droite à G. Comme on a supposé $F \cap G = \{0\}$, on a donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$ et $\sum_{j=1}^{p} \mu_j e'_j = 0$. Chacune des familles $(e_1, \dots, e_n)$ et $(e'_1, \dots, e'_p)$ étant libre en tant que base d'une sev de E, cela implique que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ et $\mu_1 = \dots = \mu_p = 0$, ce qui prouve bien la liberté de la famille $(e_1, \dots, e_n, e'_1, \dots, e'_p)$. Comme cette famille est par ailleurs génératrice de $F + G$ (cf plus haut), c'en est bien une base.

Définition 12. Deux sous-espaces vectoriels F et G d'un même espace vectoriel E sont **supplémentaires dans** E s'ils vérifient les deux conditions suivantes :

- $F \cap G = \{0\}$.
- $F + G = E$.

Autrement dit, F et G sont supplémentaires si $F \oplus G = E$.

Remarque 15. Ces deux conditions assurent en fait que tout vecteur de E peut s'écrire comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G (c'est exactement la deuxième condition donnée) et que cette décomposition est unique : en effet, si $u + v = u' + v'$, avec $(u, u') \in F^2$ et $(v, v') \in G^2$, alors $u - u' = v' - v$. Or, $u - u' \in F$ et $v' - v \in G$, ce qui implique en appliquant notre première condition que $u - u' = v - v' = 0$, autrement dit qu'on a écrit deux fois la même décomposition. On pourra donc parler dans le cas de supplémentaires de **la** décomposition d'un vecteur de E dans $F \oplus G$. Remarquons également que, pour les mêmes raisons que ci-dessus, la famille obtenue en réunissant une base de F et une base de G sera bien sûr une base de E. C'est même une équivalence.

Exemple : Dans l'espace, un plan (vectoriel, donc passant par l'origine) et une droite qui n'est pas incluse dans ce plan sont toujours supplémentaires. La notion de supplémentarité signifie en fait que les deux sous-espaces « se complètent bien » pour permettre d'obtenir par combinaisons linéaires l'espace E tout entier. Nous pourrons interpréter plus facilement cette intuition une fois que nous aurons défini la notion de dimension (ici, le plan de dimension 2 est supplémentaire d'une droite de dimension 1 dans l'espace qui est de dimension $3 = 2 + 1$).

Exemple : Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, si on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ celui des matrices antisymétriques, alors $\mathcal{S} \oplus \mathcal{A} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

- $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et de même pour $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$. Plus simplement, on peut aussi dire que la condition $A =^t A$ (ou $A = -^t A$) est stable par combinaisons linéaires.
- $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{0\}$, puisque la seule matrice vérifiant $A =^t A = -A$ est la matrice nulle.
- $\mathcal{S} + \mathcal{A} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, car on peut décomposer une matrice quelconque de la façon suivante : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{b-c}{2} \\ \frac{c-b}{2} & 0 \end{pmatrix}$. La première des deux matrices est visiblement symétrique, et l'autre antisymétrique.

On peut en fait généraliser assez facilement ce résultat à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: toute matrice carrée A peut s'écrire sous la forme $A = \frac{A +^t A}{2} + \frac{A -^t A}{2}$, ce qui prouve que $\mathcal{S} + \mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (en gardant les mêmes notations que ci-dessus). L'intersection des deux sous-espaces est toujours nulle pour la même raison que ci-dessus, donc ils restent supplémentaires. Cela prouve en passant que la décomposition de A en somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique est unique.

1.6 Sous-espaces affines.

Dans ce paragraphe, on va (assez exceptionnellement pour cette année) s'intéresser à la façon dont on peut faire de la géométrie dans les espaces vectoriels. Dans un espace géométrique E, les éléments peuvent être vus de deux façons différentes (les mêmes coordonnées seront donc vues comme celles de deux objets de nature mathématique distincte) :

- comme des vecteurs (ce qu'on fait depuis le début de ce chapitre), qu'on notera $\vec{u}$, $\vec{v}$, ...(on mettra dans ce paragraphe les traditionnelles flèches sur les vecteurs pour bien les distinguer des points).
- comme des **points** qu'on notera plutôt A, B, ...

Bien entendu, les objets manipulés restent rigoureusement les mêmes dans les deux cas, c'est simplement l'usage qu'on en fera qui peut être différent. Cette ambiguïté est en fait déjà présente dans les espaces vectoriels ordinaires $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$: quand on fait de la géométrie cartésienne (avec des coordonnées), on utilise la même notation (x, y) ou (x, y, z) pour désigner les coordonnées des points et des vecteurs. Cela revient en fait à identifier tout point A avec le vecteur $\overrightarrow{OA}$, O étant l'origine d'un repère fixé du plan ou de l'espace.

Définition 13. Si $\vec{u}$ est un vecteur de E, la **translation de vecteur** $\vec{u}$ est l'application $t_{\vec{u}}$: $\left\{\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ A & \mapsto & A+\vec{u} \end{array}\right.$.

Remarque 16. La notation $A+\vec{u}$, qui sous-entend une somme de deux objets de nature mathématique différente, est assez choquante, mais dans la mesure où il s'agit en fait de deux éléments de l'espace vectoriel E, les additionner ne pose pas de problème. On se permettra régulièrement ce genre d'abus de notation. Ainsi, en notant B l'image par A de la translation $t_{\vec{u}}$, on notera $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, mais on peut aussi décrire le vecteur « reliant deux points » plus simplement par $\overrightarrow{AB} = B - A$. Ces vecteurs vérifient bien sûr toutes les propriétés classiques des vecteurs du plan ou de l'espace : $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$, relation de Chasles $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Définition 14. Un **sous-espace affine** (souvent abrégé en sea) d'un espace vectoriel E est un sous-ensemble de la forme $\mathcal{F} = A + F = \{A + \vec{u} \mid \vec{u} \in F\}$, où F est un sous-espace vectoriel de E. Autrement dit, $\mathcal{F}$ est l'image d'un sous-espace vectoriel par une translation.

Il s'agit simplement intuitivement de créer des équivalents de sous-espaces vectoriels « ne contenant pas l'origine », ce qui correspond tout à fait par exemple à la notion de droite affine dans le plan (alors qu'une droite **vectorielle** contient nécessairement le vecteur nul). Par exemple, dans $E = \mathbb{R}^2$, si $A = (-1, 3)$ et $\vec{u} = (1, 2)$, le sea $\mathcal{F} = A + \mathrm{Vect}(\vec{u})$ est la droite affine passant par le point A, de vecteur directeur $\vec{u}$. On parlera d'ailleurs de vecteurs directeurs d'un sea pour désigner une base du sev F, même dans le cas de sea de dimension supérieure à 1, ce qui est cohérent avec la définition incluse dans la propriété suivante :

Proposition 6. Si un sous-espace affine peut s'écrire sous la forme $\mathcal{F} = A + F$, alors le sev F est unique. Il est appelé **direction** du sea $\mathcal{F}$.

Le point A peut par contre être remplacé par n'importe quel autre point appartenant à $\mathcal{F}$: $\forall (A, B) \in \mathcal{F}^2$, $A + F = B + F = \mathcal{F}$.

Démonstration. Supposons donc que $\mathcal{F} = A+F = B+F'$, où A et B sont deux points de $\mathcal{F}$ et F et F' deux sev, alors en particulier on peut écrire $B = A+\vec{u}$, pour un certain vecteur $\vec{u} \in F$. Autrement dit, $\overrightarrow{AB} = \vec{u} \in F$. Supposons alors $\vec{v} \in F$, on sait que $A + \overrightarrow{AB} + \vec{v} \in \mathcal{F}$ (puisque $\overrightarrow{AB} + \vec{v}$ est somme de deux vecteurs de F, donc appartient au sev F), donc $B + \vec{v} \in \mathcal{F}$, ce qui prouve que $\vec{v} \in F'$. On a fonc $F \subset F'$, et les deux sev jouant un rôle symétrique, on montre de même que $F' \subset F$, ce qui prouve que $F = F'$. La deuxième partie de la propriété découle du calcul déjà effectué pour démarrer la démonstration. □

2 Dimension d'un espace vectoriel.

2.1 Aspect théorique.

Définition 15. Un espace vectoriel E est **de dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie.

Proposition 7. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de vecteurs de E, et $e_{n+1} \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, alors la famille $(e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$ est toujours une famille libre.

Si au contraire la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice et $e_n \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$, alors la famille $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est encore génératrice.

Démonstration. Supposons qu'une combinaison linéaire annule la famille : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i e_i = 0$, alors $\lambda_{n+1}e_{n+1} = -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Le membre de droite appartenant sûrement à $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, l'égalité n'est possible que si $\lambda_{n+1} = 0$. Mais alors le membre de droite est nul, ce qui implique par liberté de la famille $(e_1, \dots, e_n)$ que tous les coefficients λ_i sont nuls. La famille $(e_1, \dots, e_{n+1})$ est donc bien libre. Prouvons maintenant la deuxième propriété : d'après l'hypothèse, $e_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i$. La famille étant par ailleurs génératrice, on peut écrire, pour tout vecteur u de l'espace vectoriel dans lequel on travaille, que $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i = \sum_{i=1}^{n-1} (\mu_i + \lambda_i) e_i$ en remplaçant e_n par sa valeur. La famille $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est donc génératrice. □

Théorème 1. Théorème de la base incomplète.

Soient $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{G} = (f_1, \dots, f_p)$ deux familles respectivement libre et génératrice d'un même espace vectoriel E, alors on peut compléter la première famille en une base de E à l'aide de vecteurs appartenant à la famille $\mathcal{G}$.

Démonstration. La démonstration de ce théorème fondamental est en fait très constructive (et doit pouvoir être reproduite sur des exemples concrets) : on fait la liste des vecteurs de la famille $\mathcal{G}$, un par un, et on essaie de les ajouter à la famille $\mathcal{F}$ (éventuellement déjà un peu augmentée). À chaque vecteur, s'il est dans l'espace vectoriel engendré par la famille dont on dispose au moment de l'ajout, on l'oublie (sinon la famille augmentée ne serait plus libre), sinon on l'ajoute à la famille. D'après la proposition précédente, la famille ainsi obtenue sera nécessairement libre puisqu'obtenue en ajoutant à la famille libre $\mathcal{F}$ des vecteurs n'appartenant jamais à l'espace vectoriel engendré par les précédents. Elle est par ailleurs génératrice car obtenue à partir de $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ en supprimant des vecteurs appartenant quand à eux à l'espace engendré par d'autres vecteurs de la famille. C'est donc une base. □

Exemple : On souhaite compléter la famille $(X^2 - X + 1, 2X^2 - 2)$ en une base de l'expace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$. Pour cela, on va prendre comme famille génératrice la base $(1, X, X^2, X^3)$ (ce qu'on appellera bientôt la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, et qui est de fait la base la plus « simple » disponible, on n'a aucune raison de choisir une famille génératrice plus compliquée). On teste les vecteurs l'un après l'autre :

- $1 \notin \text{Vect}(X^2 - X + 1, 2X^2 - 1)$ (en effet, une combinaison linéaire de nos deux polynômes ne peut être de degré 0 que si on met un coefficient 0 devant $X^2 - X + 1$ pour annuler le $-X$ et on ne peut clairement pas obtenir 1 en multipliant $2X^2 - 2$ par une constante), on l'ajoute à notre famille.
- $X = \dfrac{1}{2} \times (2X^2 - 1) - (X^2 - X + 1) + \dfrac{3}{2} \times 1$, donc on n'ajoute surtout pas X à notre famille (qui ne serait alors plus libre).
- $X^2 = \dfrac{1}{2} \times (2X^2 - 1) + \dfrac{1}{2} \times 1$, on ne l'ajoute pas non plus.
- $X^3 \notin \text{Vect}(X^2 - X + 1, 2X^2 - 1, 1)$ (on ne risque pas d'obtenir X^3 en combinant des polynômes de degré 2), on l'ajoute à la famille.

Conclusion : la famille $(X^2 - X + 1, 2X^2 - 1, 1, X^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Proposition 8. Lemme de Steinitz.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille génératrice d'un espace vectoriel E et $(f_1, \dots, f_{n+1})$ une autre famille du même espace vectoriel E, alors la famille $(f_1, \dots, f_{n+1})$ est nécessairement liée.

Démonstration. On procède par récurrence sur l'entier n. Pour $n = 0$, c'est vrai, la première famille étant vide, elle ne peut engendrer que l'espace vectoriel $E = \{0\}$, donc la deuxième famille contient un vecteur qui est le vecteur nul, et cette famille est liée (oui, le vecteur nul tout seul constitue une famille liée). Supposons la propriété vraie au rang n, et ajoutons un vecteur à chaque famille. La famille $(e_1, \dots, e_{n+1})$ étant supposée génératrice, $f_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{i,j} e_i$ pour tout entier $j \leqslant n + 2$. Si tous les coefficients $\lambda_{n+1,j}$ sont nuls, alors tous les vecteurs de la deuxième famille sont combinaisons linéaires de $(e_1, \dots, e_n)$, on peut appliquer directement l'hypothèse de récurrence pour conclure que $(f_1, \dots, f_{n+1})$ est liée, ce qui ne risque pas de s'améliorer si on ajouter f_{n+2}. Sinon, supposons par exemple, quitte à réordonner les vecteurs de la deuxième famille, que $\lambda_{n+1,n+2} \neq 0$, on pose alors, pour tout entier $i \leqslant n+1$, $g_i = f_i - \dfrac{\lambda_{n+1,i}}{\lambda_{n+1,n+2}} f_{n+2}$, de façon à annuler la coordonnée suivant e_{n+1}. La famille $(g_1, \dots, g_{n+1})$ est alors constituée de vecteurs dans $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, par hypothèse de récurrence, elle est liée. Cela signifie qu'il y a une relation linéaire du type $\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \mu_j \left(f_i - \frac{\lambda_{n+1,i}}{\lambda_{n+1,n+2}} f_{n+2} \right) = 0$. Quitte à tout développer, il s'agit d'une relation liant les vecteurs $(f_1, \dots, f_{n+2})$, qui forment donc une famille liée. □

Théorème 2. Dans un espace vectoriel E de dimension finie, il existe au moins une base finie. Toutes les bases finies ont par ailleurs le même nombre d'éléments, appelé **dimension** de l'espace vectoriel. On la note en général $\dim(E)$.

Démonstration. Par définition, un espace de dimension finie contient une famille génératrice finie. Il contient par ailleurs des familles libres, par exemple la famille vide. Le théorème de la base incomplète assure alors qu'on peut construire une base finie de E (on complète la famille vide avec les éléments de la famille génératrice). Supposons désormais qu'il existe deux bases de cardinal différent, notons $\mathcal{B}$ celle contenant le moins de vecteurs (on notera n le nombre de vecteurs de $\mathcal{B}$). La famille $\mathcal{B}$ étant génératrice, le lemme de Steinitz assure que toute famille de $n+1$ vecteurs est liée. En particulier, n'importe quelle sous-famille de $n+1$ vecteurs de la base $\mathcal{C}$ est liée, ce qui est absurde pour une base. Toutes les bases ont donc bien le même nombre d'éléments. □

Proposition 9. Dans un espace vectoriel de dimension n :

- Toute famille libre possède au maximum n vecteurs.
- Toute famille libre de n vecteurs est une base.
- Toute famille génératrice possède au minimum n vecteurs.
- Toute famille génératrice de n vecteurs est une base.

Démonstration. En effet, une famille libre peut, d'après le théorème de la base incomplète, être complétée en une base de E, qui contiendra nécessairement n vecteurs. Il faut donc qu'on soit parti d'une famille de moins de n vecteurs. Par ailleurs, si la famille avait déjà n vecteurs, la complétion sera vite faite, on ne rajoute rien (sinon on aura strictement plus de n vecteurs), la famille était donc déjà une base. De même pour une famille génératrice, on peut trouver une base incluse dans la famille en appliquant le théorème de la base incomplète avec la famille libre vide. La fin du raisonnement est alors complètement symétrique de ce qu'on vient de faire pour une famille libre. □

Exemple : Il suffira désormais de prouver qu'un famille est libre **ou** génératrice pour prouver qu'elle est une base d'un espace vectoriel usuel, ce qui simplifie grandement les démonstrations. En général, on prouve la liberté, ce qui est plus facile. Ainsi, la famille $((1,2),(-3,7))$ est libre dans $\mathbb{R}^2$ (ses vecteurs ne sont pas proportionnels) et contient deux vecteurs, c'est donc une base.

2.2 Sous-espaces vectoriels et dimension.

Proposition 10. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.

Démonstration. Les familles libres de F étant aussi des familles libres de E, elles ne peuvent pas avoir plus de n élemnts. Prenons une famille libre dans F qui soit de cardinal le plus grand possible. Cette famille est alors forcément génératrice de F, puisque dans le cas contraire, on pourrait trouver un vecteur n'appartenant pas à l'espace engendré par notre famille, et, en l'ajoutant à la famille, créer une famille toujours libre mais contenant plus d'éléments que la famille libre maximale ! L'espace F est donc de dimension finie, et la base qu'on vient d'en construire contient moins de n vecteurs, d'où l'inégalité sur les dimensions. □

Remarque 17. On aura $F = E$ si et seulement si $\dim(F) = \dim(E)$, ce qui permet de simplifier les preuves d'égalité entre espaces vectoriels quand on a des informations sur leurs dimensions (on peut procéder par simple inclusion et non plus par double inclusion).

Théorème 3. Formule de Grassmann.

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un même espace E, alors $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$. En particulier, si F et G sont supplémentaires dans E, alors $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Démonstration. Cette formule nous rappelle diablement celle du cardinal d'une union de deux ensembles. C'est en fait tout à fait logique, puisqu'elle s'identifie exactement à une formule de cardinal d'union si on considère des bases de chacun des espaces vectoriels concernés. Nous allons d'ailleurs la prouver en suivant le même schéma, c'est-à-dire en commençant par le cas particulier où F et G sont en somme directe. Notons $(f_1, \dots, f_n)$ une base de F et $(g_1, \dots, g_p)$ une base de G, alors $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p)$ est une base de $F \oplus G$ (démonstration effectuée plus haut). L'égalité $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$ en découle immédiatement.
Passons au cas général. Notons F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F et G' un supplémentaire de $F \cap G$ dans G (de tels supplémentaires existent, il suffit de compléter une base de $F \cap G$ en base de F ou de G et de conserver les vecteurs ajoutés pour en obtenir une base d'après la première partie de la démonstration). On peut certainement affirmer que $\dim(F) = \dim(F') + \dim(F \cap G)$ et $\dim(G) = \dim(G') + \dim(F \cap G)$. Par ailleurs, F' et G sont supplémentaires dans $F + G$. En effet, leur intersection est réduite à $\{0\}$ puisqu'un vecteur de l'intersection appartiendrait à la fois à F' et à $F \cap G$, qui sont supplémentaires dans F, et leur somme est bien égale à $F + G$: un vecteur pouvant s'écrire sous la forme $u_F + u_G$ peut encore se décomposer en $u_{F'} + u_{F \cap G} + u_G$, avec $u_{F \cap G} + u_G \in G$. Toujours en appliquant notre formule dans le cas particulier démontré, $\dim(F+G) = \dim(F') + \dim(G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$. □

Remarque 18. La formule de Grassmann permet encore une fois de réduire considérablement le travail à effectuer, cette fois-ci pour prouver que deux sous-espaces sont supplémentaires. Il suffit en effet de prouver, au choix, deux des trois propriétés suivantes :

- $F \cap G = \{0\}$
- $F + G = E$
- $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$

Exemple : Si on reprend l'exemple traité précédemment des matrices symétriques et antisymétriques dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices symétriques forment un sous-espace de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$, les antisymétriques un sous-espace de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$, et ils sont toujours supplémentaires (la somme des dimensions vaut bien n^2, et seule la matrice nulle est à la fois symétrique et antisymétrique).

Définition 16. Dans un espace vectoriel de dimension n, un **hyperplan** est un sous-espace de dimension $n - 1$.

3 Espaces vectoriels usuels.

Proposition 11. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est de dimension n, et la famille de vecteurs $((1,0,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1,0,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,0,1))$ en est une base, appelée **base canonique** de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Donnons un nom aux vecteurs de la base : $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, où le 1 est situé en i-ème position. Soit $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, donc la famille est génératrice. Elle est clairement libre, puisque l'égalité $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$ est équivalente à la condition $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$. Il s'agit donc bien d'une base. C'est la base qu'on utilise habituellement pour les calculs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. □

Remarque 19. L'espace vectoriel $\mathbb{C}$ est de dimension 1 comme espace vectoriel complexe (c'est-à-dire que la structure d'espace vectoriel autorise les multiplications par des constantes complexes et pas seulement réelles), mais de dimension 2 en tant qu'espace vectoriel réel, la famille $(1, i)$ en formant assez facilement une base. Plus généralement, $\mathbb{C}^n$ est de dimension $2n$ en tant qu'espace vectoriel réel.

Proposition 12. L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est de dimension np, et la famille constituée des matrices $E_{i,j}$ (pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$), où $E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \dots & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$, en constitue une base appelée **base canonique** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Démonstration. La famille $(E_{i,j})$ est bien génératrice puisque, si $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a $M = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} m_{i,j} E_{i,j}$. Supposons maintenant qu'une combinaison linéaire des matrices de la famille soit nulle : $\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \lambda_{i,j} E_{i,j} = 0$. La somme de gauche étant simplement la matrice dont le coefficient d'indice i, j vaut $\lambda_{i,j}$, elle est nulle seulement si tous les $\lambda_{i,j}$ sont nuls, la famille est donc bien libre. □

Remarque 20. Les coordonnées d'une matrice dans cette base canonique sont simplement ses coefficients, lus de gauche à droite et de haut en bas. Remarquons que, comme dans le cas de $\mathbb{R}^n$, la base a été obtenue en mettant successivement des 1 à tous les endroits possibles, et en remplissant avec des 0. C'est un principe que nous allons retrouver dans notre troisième exemple d'espace vectoriel classique.

Proposition 13. L'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n + 1$, et la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ en constitue une base appelée **base canonique**.

Démonstration. Rien à démontrer ici, la famille est génératrice et libre par définition de ce qu'est un polynôme. □

Remarque 21. Les coordonnées d'un polynôme dans la base canonique sont simplement ses coefficients, donnés par ordre de puissances croissantes.

Définition 17. Une famille **échelonnée** de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ est une famille constituée de polynômes de degrés tous différents.

Proposition 14. Toute famille échelonnée de polynômes est libre dans $\mathbb{R}_n[X]$.
En particulier, une famille échelonnée de $n+1$ polynômes est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Démonstration. Procédons par récurrence sur l'entier n et supposons la famille constituée de $n+1$ polynômes de degrés respectif $0, 1, \dots, n$ (si la famille contient moins de polynômes, elle est une sous-famille d'une telle famille et donc a fortiori libre si cette famille l'est). Si $n = 0$, une famille échelonnée de polynômes est réduite à un seul polynôme constant non nul (puisque de degré 0 et pas $-\infty$), qui constitue bien une base de $\mathbb{R}_0[X]$. Supposons la propriété vérifiée au rang n, et considérons une famille de polynômes échelonnée $(P_0, P_1, \dots, P_{n+1})$. Par hypothèse de récurrence, $(P_0, \dots, P_n)$ constitue une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Prouvons que notre famille est génératrice : soit $Q \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, on peut écrire $Q = a_{n+1}X^{n+1} + Q_1$, avec $d°(Q_1) \leqslant n$. De même, $P_{n+1} = b_{n+1}X^{n+1} + R$, avec $d°(R) \leqslant n$ et $b_{n+1} \neq 0$ puisque P_{n+1} est supposé de degré $n+1$. On peut alors écrire $Q = \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}P_{n+1} - \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}R + Q_1$. Comme $Q_1 - \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}R$ est par construction un polynôme de degré inférieur ou égal à n, on peut l'écrire comme combinaison linéaire de P_0, P_1, ..., P_n, donc Q est une combinaison linéaire de notre famille. Prouvons désormais que notre famille est libre : si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i P_i = 0$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i + \lambda_{n+1}R = -\lambda_{n+1}b_{n+1}X^{n+1}$. Comme le membre de gauche est de degré au plus n, cela n'est possible que si $\lambda_{n+1} = 0$. Mais alors on a une combinaison linéaire annulant la famille $(P_0, \dots, P_n)$ qui est libre, tous ses coefficients sont nécessairement nuls. Notre famille est donc libre en plus d'être génératrice, c'est une base. $\square$