

# Devoir de rentrée : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

2 septembre 2024

1. En écrivant la racine carrée sous la forme d'une puissance  $\frac{1}{2}$ , on doit pouvoir donner la réponse directement :  $F : x \mapsto \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$  est une primitive de la fonction racine carrée.
2. Soit on regroupe les racines et on simplifie petit à petit, soit on décompose directement les entiers en facteurs premiers :  $768 = 2 \times 384 = 2^2 \times 192 = 2^3 \times 96 = 2^4 \times 48 = 2^5 \times 24 = 2^6 \times 12 = 2^7 \times 6 = 2^8 \times 3$  (bien sûr, personne ne vous interdit de vous rendre compte immédiatement que  $768 = 256 \times 3$ ), et  $432 = 2 \times 216 = 2^2 \times 108 = 2^3 \times 54 = 2^4 \times 27 = 2^4 \times 3^3$ , donc  $\sqrt{\frac{768}{432}} = \sqrt{\frac{2^4}{3^2}} = \frac{4}{3}$ .
3. En notant  $q$  la raison de la suite, on doit avoir  $u_4 = q^2 u_2$ , donc  $q^2 = \frac{u_4}{u_2} = 2$ . Autrement dit,  $q = \pm\sqrt{2}$ , et on en déduit  $u_3 = qu_2 = \pm 3\sqrt{2}$ .
4. Les deux termes apparaissant dans le calcul sont des cas classiques de croissance comparée :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$  (la fonction  $\ln$  croît moins rapidement qu'une fonction puissance), et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$  (au contraire, la fonction exponentielle croît plus vite que toute fonction puissance). Il n'y a plus qu'à soustraire les deux limites pour conclure :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} - 3 \frac{x}{\ln(x)} = -\infty$ .
5. On cherche donc des fonctions dont la dérivée seconde est l'opposée de la fonction d'origine. Vous en connaissez effectivement deux, à aller chercher du côté de la trigonométrie : cosinus et sinus.
6. Je vous donne la version qu'on reverra en cours d'année : si  $f$  est une fonction continue sur un segment  $[a, b]$ , et  $c$  un réel compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , alors il existe un réel  $x \in [a, b]$  tel que  $f(x) = c$  (autre dit, toute valeur intermédiaire entre les valeurs atteintes aux bornes du segment est atteinte par une fonction continue).
7. C'est un classique, on applique la formule en posant  $u(x) = x$ , donc  $u'(x) = 1$ , et  $v'(x) = \cos(x)$ , qu'on peut intégrer en  $v(x) = \sin(x)$ . On en déduit que  $I = [x \sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx = \frac{\pi}{2} + [\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$ .
8. Un petit dessin de cercle trigonométrique suffit amplement si on veut justifier la réponse donnée :  $\mathcal{S} = \left[-\pi, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$ .
9. On multiplie par le conjugué pour simplifier :  $\frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$ .
10. On fait rapidement la liste : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ça en fait exactement dix.
11. Un plan de vecteur normal  $\vec{u}$  a une équation cartésienne du type  $-x + y + 2z = d$ , où  $d$  est une constante réelle. Puisque le point  $A$  doit appartenir au plan, il doit vérifier son équation, ce qui impose  $d = -1 + 2 + 6 = 7$ . Le plan cherché a donc pour équation  $-x + y + 2z = 7$ .

12. Deux valeurs absolues sont égales si et seulement si les expressions à l'intérieur sont égales ou opposées. On doit donc avoir  $x^2 - 3x + 1 = x^2 + 2x - 2$ , ce qui implique  $-5x + 3 = 0$ , soit  $x = \frac{3}{5}$ ; ou  $x^2 - 3x + 1 = -x^2 - 2x + 2$ , donc  $2x^2 - x - 1 = 0$ , équation du second degré de discriminant  $\Delta = 1 + 8 = 9$  et admettant pour solutions réelles  $x_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$  et  $x_2 = \frac{1+3}{4} = 1$ . Conclusion :  $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, 1\right\}$ .
13. La fonction  $f$  est dérivable sur son domaine de définition  $\mathbb{R}^{+*}$ , de dérivée  $f' : x \mapsto \frac{2}{x} - 1$ . En particulier,  $f'(1) = 1$ , et  $f(1) = 2 \times 0 - 1 = -1$ , donc la tangente recherchée a pour équation  $y = (x - 1) - 1 = x - 2$ .
14. On commence par chercher la congruence modulo  $2\pi$  de ce qui se trouve dans le cosinus :  $\frac{209\pi}{6} = \frac{210\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 35\pi - \frac{\pi}{6} = 34\pi + \frac{5\pi}{6}$ . La fonction cosinus étant périodique de période  $2\pi$ , on en déduit que  $\cos\left(\frac{209\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .
15. Le calcul découle de la formule des probabilités totales (on peut faire un arbre pour mieux se représenter les choses : en remplaçant les pourcentages par des fractions, la probabilité recherchée vaut  $\frac{1}{3} \times \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ ).
16. La fonction  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et sur cet intervalle,  $f'(x) = \ln(x^2) + x \times \frac{2x}{x^2} = 2\ln(x) + 2 = 2(\ln(x) + 1)$ . En fait, on peut aussi simplifier le  $\ln(x^2)$  en  $2\ln(x)$  avant de faire le calcul de dérivée :  $f(x) = 2x \ln(x)$  donc  $f'(x) = 2\ln(x) + 2\frac{x}{x} = 2(\ln(x) + 1)$ .
17. On effectue le changement de variables  $X = e^x$  pour se ramener à l'équation  $X^2 + 2X - 8 = 0$ , équation du second degré de discriminant  $\Delta = 4 + 32 = 36$ , admettant pour racines réelles  $X_1 = \frac{-2-6}{2} = -4$  et  $X_2 = \frac{-2+6}{2} = 2$ . La première valeur est à exclure car strictement négative ( $X = e^x$  est nécessairement un réel positif), et  $e^x = 2$  donne comme unique solution de l'équation initiale  $x = \ln(2)$ .
18. Aucune justification demandée : si  $X$  est la variable aléatoire étudiée,  $\mathbb{E}(X) = np$  et  $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$ .
19. On évite bien sûr un calcul inutilement compliqué en constatant que  $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ , donc  $\frac{2x+1}{x^2-4} + \frac{x^2+2}{x-2} = \frac{2x+1 + (x^2+2)(x+2)}{x^2-4} = \frac{x^3 + 2x^2 + 4x + 5}{x^2-4}$ . On ne peut pas faire mieux.
20. Un problème de dénombrement un peu pénible (qui a dit « pléonasme » ?), qu'on peut résoudre en séparant les cas ainsi :
- on ne peut évidemment pas s'en sortir en utilisant une seule des trois couleurs.
  - si on n'utilise que deux couleurs, les carrés diagonalement opposés doivent être de la même couleur. Il faut choisir les deux couleurs (trois possibilités : bleu+jaune, bleu+rouge ou jaune+rouge), puis choisir quelle couleur sera sur la première diagonale (l'autre servant pour les deux carrés restants), ce qui donne au total  $3 \times 2 = 6$  coloriage possibles avec deux couleurs.
  - si on utilise les trois couleurs, deux carrés (nécessairement sur une diagonale) seront de la même couleur. On choisit la couleur qui apparaît deux fois (trois possibilités), on choisit la diagonale utilisée pour cette couleur (deux possibilités), puis on choisit comment répartir les deux couleurs restantes pour les deux derniers carrés (encore deux possibilités), donc  $3 \times 2 \times 2 = 12$  coloriage possibles.
- Il y a donc au total 18 coloriage possibles (non je ne vais pas tous vous les dessiner).