Programme de colle n$^{\text{o}}$ 23

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 31/03 au 04/04 2025

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtiments corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 18 : Intégration.

- Construction de l'intégrale de Riemann :
  — continuité uniforme, **théorème de Heine**
  — espace vectoriel des fonctions en escalier sur un segment, subdivisions adaptées, intégrale des fonctions en escalier, propriétés fondamentales de cette intégrale (linéarité, relation de Chasles, positivité)
  — fonctions continues pas morceaux sur un segment, approximation par les fonctions en escalier, définition de l'intégrale comme borne supérieure des intégrales de fonctions en escalier minorant f, égale à la borne inférieure des intégrales de fonctions en escalier majorant f
  — extension des propriétés fondamentales à l'intégrale des fonctions continues par morceaux
- Inégalités et intégrales :
  — intégration d'inégalités sur un segment
  — si f est continue et positive sur $[a, b]$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt = 0$ ssi $f = 0$
  — inégalité triangulaire $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\ dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\ dt$
  — **inégalité de Cauchy-Schwartz** $\displaystyle\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2 \times \int_a^b g^2$ (démontrée en étudiant le signe d'un trinôme)
- Exemples d'études de suites d'intégrales.
- Théorème fondamental de l'analyse : $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ est la primitive de f s'annulant en a, étude de fonctions définies par des intégrales à bornes variables (exemple vu en cours : $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\text{sh}(t)}{t}\ dt$), mais bien sûr pas de « vraies » intégrales à paramètres, qui seront vues deuxième année.
- Extension de l'intégrale aux fonctions à valeurs complexes.
- **Formule de Taylor avec reste intégral**, inégalité de Taylor-Lagrange (la formule avec égalité n'est par contre officiellement pas au programme).
- Sommes de Riemann : convergence vers l'intégrale pour une fonction continue, majoration de l'erreur pour une fonction $\mathcal{C}^1$.

Prévisions pour la semaine suivante : applications linéaires.