

Programme de colle n° 22

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 24/03 au 28/03 2025

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtimements corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 17 : Espaces vectoriels.

- Définitions et exemples d'espaces et de sous-espaces vectoriels.
- Caractérisation des sous-espaces vectoriels (au choix : non vide et stable par somme et produit extérieur, ou non vide et stable par combinaisons linéaires).
- Familles de vecteurs :
 - Combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs, sous-espace vectoriel engendré par une famille, notation Vect et exemples d'utilisation (notamment pour les solutions de systèmes linéaires homogènes)
 - Familles génératrices, familles libres et liées, bases, coordonnées et composantes d'un vecteur dans une base
- Intersection de sous-espaces vectoriels, somme et somme directe de sous-espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels supplémentaires, caractérisation à l'aide de bases (F et G sont supplémentaires si et seulement si l'union d'une base de F et d'une base de G donne une base de E).
- Dimension :
 - définition d'un espace vectoriel de dimension finie (comme un espace qui admet une famille génératrice finie)
 - théorème de la base incomplète (on doit être capable d'appliquer l'algorithme permettant de compléter une famille libre en base d'un espace vectoriel en piochant des vecteurs dans une famille génératrice)
 - existence de bases dans un espace de dimension finie, lemme de Steinitz, définition de la dimension (toutes les bases ayant le même cardinal)
 - dans un espace de dimension n , toute famille libre (resp. génératrice) est constituée d'au plus (resp. au moins) n vecteurs, toute famille libre **ou** génératrice de n vecteurs est automatiquement une base
 - formule de Grassmann pour la dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels : $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$
 - caractérisations de la supplémentarité à l'aide de la dimension (F et G sont supplémentaires s'ils vérifient deux conditions parmi $F \cap G = \{0\}$, $F+G = E$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$)

- Espaces vectoriels usuels :
 - \mathbb{R}^n est un espace vectoriel de dimension n admettant pour base canonique $((1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1))$
 - $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension np admettant pour base canonique $(E_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, où E_{ij} est la matrice dont l'unique coefficient non nul est en position (i, j) , et est égal à 1
 - $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension $n+1$ admettant pour base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$, toute famille échelonnée de polynômes est libre
- aucune formule n'a été indiquée en gras pour ce chapitre mais on doit être capable de démontrer des résultats faciles comme « l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel » ou « l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs est un sous-espace vectoriel ».

Chapitre 18 : Intégration.

- Construction de l'intégrale de Riemann :
 - continuité uniforme, **théorème de Heine**
 - espace vectoriel des fonctions en escalier sur un segment, subdivisions adaptées, intégrale des fonctions en escalier, propriétés fondamentales de cette intégrale (linéarité, relation de Chasles, positivité)
 - approximation des fonctions continues par les fonctions en escalier, définition de l'intégrale comme borne supérieure des intégrales de fonctions en escalier minorant f , égale à la borne inférieure des intégrales de fonctions en escalier majorant f
 - extension des propriétés fondamentales à l'intégrale des fonctions continues
- Inégalités et intégrales :
 - intégration d'inégalités sur un segment
 - si f est continue et positive sur $[a, b]$, $\int_a^b f(t) dt = 0$ ssi $f = 0$
 - inégalité triangulaire $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$
 - **inégalité de Cauchy-Schwartz** $\left(\int_a^b fg \right)^2 \leq \int_a^b f^2 \times \int_a^b g^2$ (démontrée en étudiant le signe d'un trinôme)
- Exemples d'études de suites d'intégrales.

Prévisions pour la semaine suivante : intégration, avec notamment le retour des formules de Taylor.